Zadania

Tu začínajú zadania pre primu

1. Traja malí elfovia, Eruanno, Nildon a Mahtarin, našli spolu sedem orieškov. Každému z nich sa podarilo nájsť aspoň jeden oriešok, no žiadni dvaja ich nenazbierali rovnako veľa. Keď ich Eruanno našiel najmenej a Nildon najviac, koľko našiel Mahtarin?

2. Vek Veľkého Starého Elfa je trojciferné číslo. Vieme o ňom, že má na mieste jednotiek číslicu o 2 väčšiu ako na mieste stoviek a na mieste stoviek o päť menšiu ako na mieste desiatok. Navyše, na mieste desiatok má najväčšie jednociferné číslo. Koľko má Veľký Starý Elf rokov?

3. Keď sa draci Losso a Mirimo postavili spolu na váhu, ukázala 320 kg. Keď sa odvážili každý sám, Losso zistil, že je o 32 kg ťažší ako Mirimo. Koľko váži Mirimo?

4. Dvaja elfovia hrali hru. Prvý si vymyslel dve čísla. Potom povedal druhému: "Súčet čísel, ktoré si myslím je 36 a jedno z nich je trikrát väčšie ako druhé. Keď uhádneš, aké čísla si myslím, tak ostrihám svojho draka." Aké čísla si myslel prvý elf? Musel ostrihať svojho draka?

5. Elfovia sú veľmi vzdelaní a sčítaní. Raz sa v jednej miestnosti stretlo 100 elfov. 80 z nich vlastnilo knihu o umení, 85 zbierku úloh z matematiky, 75 encyklopédiu a 70 rozprávkovú knižku. Koľkí najmenej mali všetky štyri knihy?

6. Keď pôjde Martur po Erumaxa a potom do amfiteátra, prejde 900 metrov. Ak by šiel Erumax po Martura a potom do amfiteátra, prešiel

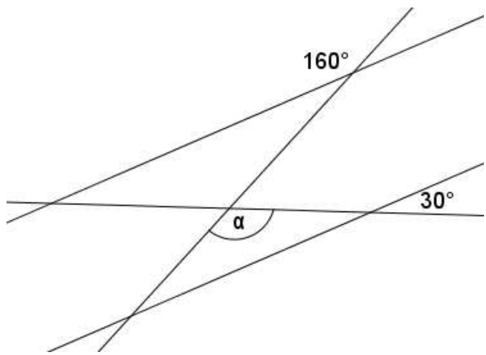
by 800 metrov. Martur býva o 600 metrov ďalej od amfiteátra ako od Erumaxa. Ako ďaleko býva Erumax od Martura a od amfiteátra?

$\boxed{7.}$ V pivnici má elf odložených 5 vriec lembasu. Súčet hmotností prvého a druhého je 11 kg, druhého a tretieho spolu 12 kg, tretieho a štvrtého spolu 13 kg, štvrtého a piateho spolu 10 kg. Tretie, štvrté a piate vrece dohromady vážia 17 kg. Koľko váži prvé vrece lembasu?

$\boxed{8.}$ Elf má vo vrecúšku 10 žltých, 10 zelených a 10 červených guľôčok. Koľko ich musí vytiahnuť, aby medzi nimi boli určite tri rovnakej farby?

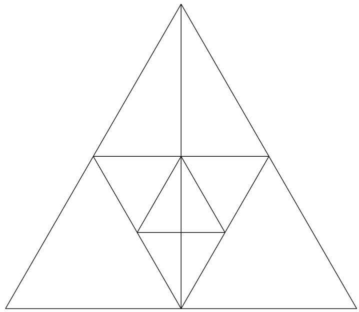
Tu začínajú zadania pre sekundu

$\boxed{9.}$ Aký veľký je uhol na obrázku?



$\boxed{10.}$ Dvojčatá Erunis a Hyando majú o tri roky mladšieho brata Tauvarna. Pred tromi rokmi mali spolu na narodeninových lembasoch 12 sviečok. Koľko sviečok mali na lembasoch tento rok?

$\boxed{11.}$ Dá sa elfský magický obrazec nakresliť jedným ťahom bez toho, aby ste prešli po nejakej čiare dvakrát? Ak áno, ako?



$\boxed{12.}$ V lese postavili veľký amfiteáter a v deň prvého predstavenia príde celý okolitý les, čiže 200 elfov. Dávajú rozprávku o Aragornovi, takže je tam o 40 detí viac ako dospelých. Keďže bol včera v lese lov, elfskí chlapi museli dnes za trest ísť s deťmi do kina, a teda je ich tam štyrikrát viac ako žien. Koľko je detí, ockov a mamičiek v kine ak žiadne dieťa nie je dospelé a každý rodič je dospelý?

$\boxed{13.}$ Okolo stola sedia štyria elfovia. Učiteľ sedí oproti Failovi a vedľa záhradníka. Lovec sedí vedľa Ráva. Mahtaitovi susedia pri stole sú Poldo a básnik. Ako sa volá a čo robí ten, čo sedí oproti Poldovi?

$\boxed{14.}$ Jednému elfovi trvá jeden deň vykopať jamu s rozmermi $2m \times 2m \times 2m$. Koľko dní bude trvať dvojici elfov vykopať jamu s rozmermi $4m \times 4m \times 4m$ ak každý elf kope jamy rovnako rýchlo?

$\boxed{15.}$ (1) Veta 2 je nepravdivá.
(2) Veta 1 je nepravdivá.
(3) Veta 3 je pravdivá.
(4) Veta 3 je pravdivá.
(5) Veta 4 je nepravdivá.
Koľko najviac viet môže byť pravdivých?

$\boxed{16.}$ Malý elf má tri červené a tri modré kúsky dreva. Keď postavíme štyri z nich na seba, vznikne veža. Koľko farebne rôznych veží vieme postaviť?

$\boxed{17.}$ Do lietacieho krúžku sa prihlásilo 35 drakov a iba 9 dračíc. Odvtedy každý týždeň do krúžku pristúpili traja draci a 5 dračíc. Po koľkých týždňoch bude v klube rovnako veľa drakov ako dračíc?

$\boxed{18.}$ Vieme, že počet elfských vojakov je trojciferné číslo začínajúce dvojčíslom 46. Keby sme ich chceli postaviť do troj- alebo do štvorstupu, vždy bude jeden vojak chýbať. Koľko ich je?

$\boxed{19.}$ Mamička Elfička priniesla z obchodu škatuľu kockového cukru. Tárí zjedla najprv hornú vrstvu, teda 77 kociek cukru, potom jednu prednú vrstvu, kde bolo 55 kociek a nakoniec bočnú vrstvu. Našťastie mamička si v tom momente Tárí všimla a nejaké kocky sa jej predsa len podarilo zachrániť. Koľko kociek cukru ešte zostalo v škatuli?

$\boxed{20.}$ Čomu sa rovná $(47-0)\cdot(47-1)\cdot(47-2)\cdot\cdots\cdot(47-99)\cdot(47-100)$?

$\boxed{21.}$ Elfský opasok v tvare obdĺžnika je kúzelný. No kedykoľvek si jeho majiteľ niečo zaželá, jeho dĺžka sa zmenší na polovicu a šírka na tretinu. Po troch prianiach mal opasok obsah $4cm^2$. Jeho pôvodná šírka bola $9cm$. Aký bol pôvodne dlhý?

$\boxed{22.}$ Doplň zátvorky a znamienka $+$, $-$, $\times$, : tak, aby platilo:

- $4 \qquad 4 \qquad 4 \qquad 4 = 1$
- $4 \qquad 4 \qquad 4 \qquad 4 = 2$
- $4 \qquad 4 \qquad 4 \qquad 4 = 3$
- $4 \qquad 4 \qquad 4 \qquad 4 = 4$

$\boxed{23.}$ Na lukostreleckej súťaži skončili na prvých štyroch miestach elfovia so štartovnými číslami 1 až 4. Žiaden z nich však neskončil na toľkom mieste, aké bolo jeho štartovné číslo. Zároveň žiadni dvaja neskončili tak, že by jeden skončil na mieste s číslom druhého a naopak (napríklad pretekári 1 a 3 teda neskončili 3. a 1.). Jeden z pretekárov skončil na mieste o 3 menšom ako jeho štartovné číslo. Elf so štartovným číslom 2 nebol posledný. V akom poradí dobehli?

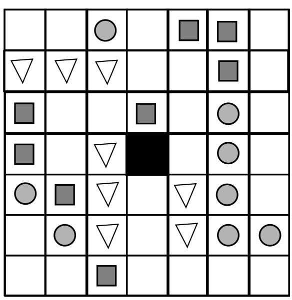
24. Každý deň presne na poludnie opustí jedna loď smerujúca do Sílthirmu prístav v Cerise a jedna loď smerujúca do Cerisu pristav v Sílthirme. Ich cesty trvajú presne 7 dní a 7 nocí (168 hodín). Lode chodia po tej istej trase tam aj naspäť (samozrejme tak, aby sa nezrazili). Keby si sa nalodil do jednej z nich v Cerise, koľko lodí idúcich zo Sílthirmu by si po ceste stretol?

Tu začínajú zadania pre kvartu

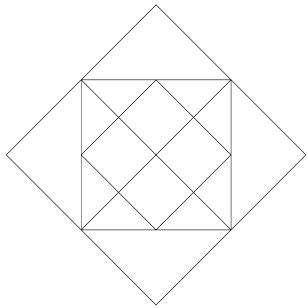
25. O tretej hodine zakukala kukučka na hodinách trikrát. Od jej prvého do posledného zakukania uplynulo 6 sekúnd. Koľko sekúnd uplynie medzi prvým a posledným zakukaním o deviatej?

26. Koľko je trojciferných čísel s ciferným súčtom 6?

27. Rozdeľte útvar na štyri obsahom aj tvarom rovnaké časti tak, aby boli v každej časti práve dva štvorce, dva kruhy a dva trojuholníky.



28. Koľko štvorcov a koľko trojuholníkov je na tomto obrázku?



$\boxed{29.}$ Táro a Eruanno sú bratia. Pred troma rokmi bol Táro sedemkrát tak starý ako Eruanno. Pred dvoma rokmi bol štyrikrát tak starý. Vlani bol tri krát tak starý a o dva roky bude dvakrát tak starý. Koľko rokov majú Táro a Eruanno?

$\boxed{30.}$ V príkladoch nahraďte hviezdičky číslami tak, aby jeden výsledok bol o 15 764 väčší ako druhý.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & * & 5 & 6 & * \\ * & 9 & * & * & 8 \\ \hline * & * & 1 & * & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 8 & * & 3 & * & * \\ - & * & 7 & * & 8 & 5 \\ \hline & 6 & 9 & * & 4 & * \end{array}$$

· · · · · · · · · · · · · · · · · · · *Tu končia zadania pre primu* · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

$\boxed{31.}$ Taurino a Sardo hádžu striedavo guľôčky do jamôčky. Každá štvrtá Taurinova a každá piata Sardova skončia vnútri. Do jamôčky práve spadla 18-ta guľôčka. Koľko guľôčok je okolo nej?

$\boxed{32.}$ Doplň do tabuľky čísla tak, aby súčet každých troch susedných čísel v riadku aj stĺpci bol 123.

29			
			56
	13		
		18	

$\boxed{33.}$ Fail a jeho dráčik Indil sa z Dračích hôr vybrali do strašidelného zámku vzdialeného $24km$. Fail ide celý čas rýchlosťou $6km/h$. Keďže z nepozornosti prisypal Indilovi do jedla nejaké zvláštne huby, Indil počas celej cesty lieta ako šialený rýchlosťou $47km/h$ medzi Failom a hradom. Vždy, keď príde k hradu, otočí sa a letí naspať k Failovi. Keď k nemu priletí, otočí sa a letí smerom k hradu a tak ďalej, až kým obaja spoločne nedorazia do hradu. Koľko kilometrov takto nalieta Indil?

$\boxed{34.}$ Dĺžka obdĺžnikovej záhrady je o sedem metrov väčšia ako jej šírka. Keď sme v záhrade po celom obvode postavili chodník so šírkou jeden meter, jej plocha sa zmenšila o $50m^2$. Aké sú rozmery celej záhrady?

$\boxed{35.}$ Štyria lovci za 3 hodiny ulovili 24 lesných mamutov. Za koľko hodín uloví 6 lovcov 48 lesných mamutov?

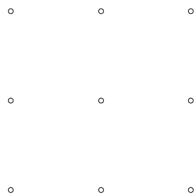
$\boxed{36.}$ Kváder s rozmermi 7, 8 a 30 centimetrov má hmotnosť 4 kilogramy. Koľko bude tento kváder vážiť, keď z každej steny odrežeme vrstvu s hrúbkou 1 centimeter?

$\boxed{37.}$ Laurië vynásobila 3 po sebe idúce prirodzené čísla, k výsledku pripočítala prostredné číslo a dostala výsledok 1331. Aké čísla mala na začiatku?

$\boxed{38.}$ Alcarnacil zje koláč za 4 minúty, Ciltalle za 6 minút a Valmelindovi by zjedenie trvalo až 12 minút. Za koľko zjedia koláč, keď ho budú jesť spolu?

…………………… *Tu končia zadania pre primu* ……………………

$\boxed{39.}$ Pospájajte jedným ťahom týchto deväť bodov tak, aby ste nakreslili lomenú čiaru so štyrmi priamymi úsekmi (ktoré nemusia začínať a končiť len v mrežových bodoch).



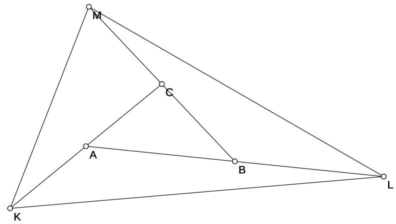
40. Máme jedenásť pravých a jednu falošnú mincu. Mince sú na nerozoznanie od seba, vieme iba, že hmotnosť falošnej mince je iná ako hmotnosť ostatných (nevieme či je ľahšia alebo ťažšia.) Okrem mincí máme jedny rovnoramenné váhy, ktoré však ukazujú iba to, ktorá strana je ťažšia. Na koľko najmenej vážení vieme s istotou zistiť, ktorá z dvanástich mincí je falošná? Akým spôsobom ich treba vážiť?

41. Vrece zemiakov váži toľko, koľko je 25kg vydelené štvrtinou váhy vreca. Ako ťažké je vrece?

42. Máme dva úplne rovnaké fúriky, ľavý naplnený vodou a pravý kofolou. Vezmeme veľkú naberačku, načrieme ňou do ľavého fúrika a prelejeme jej obsah do pravého fúrika. Potom to isté spravíme naopak - prelejeme jednu naberačku tekutiny z pravého do ľavého fúrika. Je teraz viac kofoly v ľavom alebo vody v pravom fúriku?

43. V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$, kde AB je rovnobežné s CD platí, že $|AD| = |CD|$. Uhol DBC má veľkosť 35°. Aká je veľkosť uhla ADB?

44. Pre trojuholníky ABC a KLM platí: bod C je stredom úsečky MB, bod A je stredom úsečky KC a bod B je stredom úsečky AL. Akú časť tvorí obsah trojuholníka ABC z obsahu trojuholníka KLM?



$\boxed{45.}$ Ktoré číslo je presne v strede medzi polovicou tretiny a tretinou štvrtiny?

$\boxed{46.}$ Koľko je všetkých trojciferných čísel, ktoré sú vytvorené z cifier 0, 2, 5, 7 a sú deliteľné deviatimi, pričom cifry v čísle sa môžu aj opakovať?

. . . . *Tu končia zadania pre primu* . . . .

$\boxed{47.}$ Vynásobením dvoch dvojciferných čísel dostaneme 2176. Ak zameníme poradie číslic v oboch činiteľoch, dostaneme pri ich vynásobení výsledok 1978. Aké sú to čísla?

$\boxed{48.}$ Elfský talizman vyzerá ako jedenásťboký ihlan, ktorý má na každej stene (aj podstave!) nejaké číslo. Súčet všetkých týchto čísel je 60. Každý vrchol má priradené číslo, ktoré sa rovná súčtu čísel na stenách, ktoré tento vrchol obsahujú. Navyše, všetky vrcholy majú priradené rovnaké číslo. Aké?

$\boxed{49.}$ Veľmi Starý Elf celý svoj život rozmýšľal nad tým, či existuje konvexný $n-$uholník, ktorý má rovnako veľa uhlopriečok ako strán. Vedeli by ste mu pomôcť? Ktorý $n-$uholník má takú vlastnosť? A ktorý takú, že má dvakrát toľko uhlopriečok ako strán?

$\boxed{50.}$ Aké je najmenšie prirodzené číslo (okrem nuly), ktoré je deliteľné číslom 225 a je zapísané iba nulami a jednotkami?

$\boxed{51.}$ Koleso fúrika sa za minútu otočí 100-krát, keď ide rýchlosťou $3km/h$. Aký je obvod jeho kolesa?

$\boxed{52.}$ Traja elfovia stoja v rade za sebou tak, že prvý nevidí nikoho, druhý len prvého a tretí oboch predošlých. K dispozícii je päť klobúkov, dva čierne a tri biele. Každému elfovia položia na hlavu jeden klobúk a postupne odzadu sa ich pýtajú otázku: „Vieš, aký máš na hlave klobúk?“. Posledný aj predposledný postupne odpovedia: „Neviem, aký mám na hlave klobúk.“No prvý už odpovie: „Tak ja už viem, aký mám na hlave klobúk.“Aký mal prvý elf klobúk? Ako to zistil?

$\boxed{53.}$ Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné ôsmimi, ktorých ciferný súčet je rovný siedmim a ciferný súčin je rovný šiestim (napr. číslo 832 má ciferný súčet $8 + 3 + 2 = 13$ a ciferný súčin $8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$).

$\boxed{54.}$ Pre ktorých päť po sebe idúcich celých čísel platí, že súčet druhých mocnín prvých troch sa rovná súčtu druhých mocnín posledných dvoch?

Riešenia

.... *Tu začínajú riešenia pre primu* ....

1. Ak by Eruanno našiel dva oriešky, Mahtarin by musel nájsť aspoň tri a Nildon aspoň štyri. Spolu by ich teda mali aspoň 9. Našli ich však len 7, takže Eruanno určite našiel iba jeden oriešok. Matharin našiel aspoň dva. Ak by Mahtarin našiel tri alebo viac, Nildon by tým pádom našiel tri alebo menej, a neplatilo by, že Nildon našiel najviac. Mahtarin teda našiel dva oriešky, Eruanno jeden a Nildon tri.

2. Na mieste desiatok je najväčšie jednociferné číslo, čiže 9. Číslica na mieste stoviek je o 5 menšia ako na mieste desiatok, takže na mieste stoviek je 4. Na mieste jednotiek je cifra o 2 väčšia ako na mieste stoviek - 6. Veľký Starý Elf má 496 rokov.

3. Losso váži toľko ako Mirimo + 32 kg. Losso s Mirimom spolu vážia 320 kg a to je toľko isto ako dvaja Mirimovia + 32 kg. Dvaja Mirimovia teda vážia $320 - 32 = 288kg$, čiže jeden Mirimo váži $288/2 = 144kg$.

4. Podľa zadania je druhé číslo trojnásobok prvého čísla, čiže ich súčet je štvornásobok prvého čísla. Keďže štvornásobok čísla je 36, prvé číslo je $36/4 = 9$. Druhé číslo je trojnásobok prvého, takže $9 \cdot 3 = 27$.

5. 20 elfov nemalo knihu o umení, 15 zbierku úloh z matematiky, 25 encyklopédiu a 30 rozprávkovú knižku. V miestnosti ich bolo 100, takže aspoň $100 - 20 - 15 - 25 - 30 = 10$ z nich malo všetky štyri knihy.

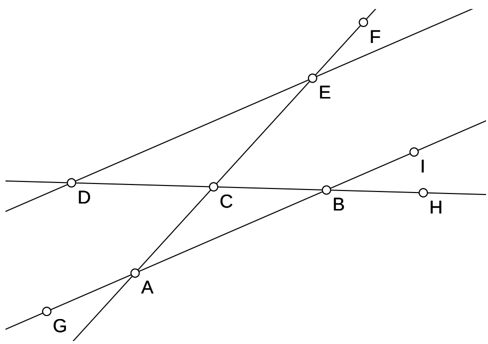
$\boxed{6.}$ Keď ide Erumax po Martura a potom idú do amfiteátra, prejde najprv vzdialenosť medzi nimi dvoma a potom vzdialenosť medzi Marturom a amfiteátrom, čo je spolu 800 metrov. Keďže vzdialenosť Martura od Erumaxa je o 600 metrov menšia ako od amfiteátra, takže prvý úsek má dĺžku 100 metrov a druhý 700 metrov. Keď ide Martur po Erumaxa, prejde najprv vzdialenosť medzi nimi (100 metrov) a potom vzdialenosť Erumaxa od amfiteátra. Spolu to je 900 metrov, takže Erumax býva od amfiteátra $900 - 100 = 800$ metrov.

$\boxed{7.}$ Tretie, štvrté a piate vrece vážia spolu 17 kg, a štvrté a piate spolu 10 kg. Takže tretie váži $17 - 10 = 7$ kg. Druhé s tretím vážia 12 kg, druhé teda váži $12 - 7 = 5$ kg. No a nakoniec prvé a druhé vrece vážia spolu 11 kg, takže prvé váži $11 - 5 = 6$ kg.

$\boxed{8.}$ Ak vytiahne iba 6 guľôčok, môže sa stať, že budú dve z každej farby. Preto ich treba vytiahnuť aspoň 7, vtedy už aspoň z jednej farby budú aspoň tri.

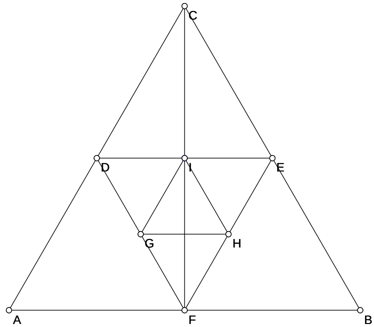
· *Tu začínajú riešenia pre sekundu* ·

$\boxed{9.}$ V trojuholníku ABC je uhol ABC vrcholový k uhlu HBI, čiže má tiež veľkosť 30°. Uhol GBC je striedavý k uhlu DEF, čiže ich veľkosť je rovnaká (160°) a uhol BAC má teda veľkosť $180° - 160° = 20°$. Veľkosť hľadaného uhla ACB je teda $\alpha = 180° - 30° - 20° = 130°$



$\boxed{10.}$ Pred tromi rokmi mali všetci spolu 12 sviečok. Teraz má každý o tri sviečky viac ako mal pred tromi rokmi, takže dokopy majú o 9 sviečok viac. Spolu teda majú na lembasoch $12 + 9 = 21$ sviečok.

11.



Obrázok sa dá prejsť napríklad cestou cez nasledovné body: C – A – B – C – I – D – F – E – I – G – H – I – F

12. Všetkých spolu je 200 a detí je o 40 viac ako dospelých, čiže detí je 120 a dospelých 80. Ockov je štyrikrát viac ako mamičiek, takže ockov je 64 a mamičiek 16.

13. Mahtaitovi susedia pri stole sú Poldo a básnik. Básnik sa môže volať buď Fail alebo Ráva. Povedzme, že básnik je Fail. Jeden jeho sused je Mahtaito, oproti nemu sedí druhý Mahtaitov sused Poldo (ten musí byť potom učiteľ) a po jeho druhej strane musí byť Ráva. Ráva a Mahtaito sedia oproti sebe a jeden z nich je záhradník, druhý lovec. Podmienka že lovec sedí vedľa Ráva teda nemôže byť splnená. Takže básnik sa musí volať Ráva. Jeho susedia sú Mahtaito a Fail. Oproti Failovi je učiteľ takže Mahtaito je učiteľ a na Polda zostalo posledné zamestnanie, lovec. Oproti Poldovi sedí básnik Ráva.

14. Jama $4m \times 4m \times 4m$ má osemkrát väčší objem ako jama $2m \times 2m \times 2m$. Jednému elfovi by teda trvalo 8 dní vykopať jamu s rozmermi $4m \times 4m \times 4m$. Dvom elfom to bude trvať polovičný čas, čiže 4 dni.

15.

Hovorme najprv len o prvých dvoch vetách. O nich je celkom zjavné, že si protirečia, čiže ak je ľubovoľná z nich pravdivá, druhá musí byť nepravdivá. Inak povedané, práve jedna z nich je vždy pravdivá. Pri druhých troch vetách môžu byť dve možnosti – ak je veta 3 pravdivá, tak je pravdivá aj štvrtá a piata je nepravdivá (čiže spolu sú pravdivé práve 3 vety zo všetkých). Ak je veta 3 nepravdivá, tak je nepravdivá aj štvrtá a piata je pravdivá, čo dohromady dáva len 2 pravdivé vety. Čiže maximálne môžu byť 3 z piatich zadaných viet pravdivé zároveň.

$\boxed{16.}$ Ak použije 3 červené kúsky a jeden modrý, vie postaviť štyri rôzne veže, ČČČM, ČČMČ, ČMČČ a MČČČ. Ak použije dva červené a dva modré kúsky, môže postaviť 6 veží: ČČMM, ČMČM, ČMMČ, MČČM, MČMČ a MMČČ. A ak použije jeden červený a tri modré kúsky, vie postaviť 4 rôzne veže ČMMM, MČMM, MMČM a MMMČ. Takže elf vie postaviť 14 rôzne farebných veží.

··················· *Tu začínajú riešenia pre terciu* ···················

$\boxed{17.}$ Každý týždeň pribudne o dve dračice viac ako drakov, takže každý týždeň sa rozdiel medzi počtom drakov a dračíc zmenší o dva. Na začiatku bolo o $35 - 9 = 24$ viac drakov ako dračíc, takže rovnako ich bude po $24 : 2 = 12$ týždňoch.

$\boxed{18.}$ Keď si preformulujeme zadania zistíme, že ak počet vojakov vydelíme štyrmi, dostaneme zvyšok tri a ak ho vydelíme tromi, dostaneme zvyšok dva. Prvú podmienku spĺňajú čísla 463 a 467, druhú čísla 461, 464 a 467. Teda vojakov je 467.

$\boxed{19.}$ Vrchná vrstva mohla mať pôvodne rozmery 1×77 alebo 7×11 kociek. V prvom prípade by po odjedení vrchnej vrstvy mala predná rozmery 55×1 a odjedením bočnej vrstvy by Tárí zjedla všetky zvyšné kocky. Ale my vieme, že ešte nejaké zostali. Takže vrchná vrstva mala rozmery 7×11 kociek. Predná vrstva mala po odjedení vrchnej rozmery 5×11, teda pred odjedením 6×11. V škatuli cukru bolo na začiatku $7 \times 11 \times 6$ kociek a po odjedení vrchnej prednej a bočnej vrstvy v nej zostalo $6 \times 10 \times 5$, čo je 300 kociek.

$\boxed{20.}$ Keďže postupne sa v násobení objaví aj $\cdots(47-47)\cdots$, násobíme nulou a teda výsledok bude rovný nule bez ohľadu na hodnoty ostatných zátvoriek.

$\boxed{21.}$ Po každom priani sa dĺžka opasku zmenší na polovicu a šírka na tretinu, takže obsah opaska sa zmenší na $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Po treťom priani mal obsah $4cm^2$, takže pred tretím bol obsah $4cm^2 \cdot 6 = 24cm^2$, pred druhým $24cm^2 \cdot 6 = 144cm^2$ a pred prvým prianím $144cm^2 \cdot 6 = 864cm^2$. Pôvodná šírka opaska bola $9cm$, takže jeho pôvodná dĺžka bola $\frac{864cm^2}{9cm} = 96cm$.

$\boxed{22.}$ Riešenia sú napríklad nasledovné:

- $(4 \times 4)/(4 \times 4) = 1$
- $(4/4) + (4/4) = 2$
- $(4 + 4 + 4)/4 = 3$
- $4 \times (4 - 4) + 4 = 4$

$\boxed{23.}$ Jediný pretekár ktorý mohol dobehnúť na mieste o 3 menšom ako jeho poradové číslo je ten so štartovným číslom 4 a musel teda skončiť prvý. Elf so štartovným číslom 2 potom nemohol byť prvý, druhý ani posledný, takže bol určite tretí. No keďže bol elf číslo 2 tretí, elf s číslom 3 nemohol byť druhý, takže musel byť posledný. No a nakoniec elf s číslom jedna mohol byť jedine druhý. Elf s štartovným číslom 4 bol prvý, jednotka druhá, dvojka tretia a trojka štvrtá.

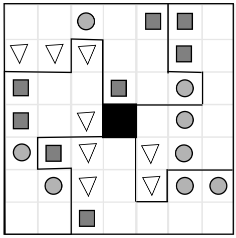
$\boxed{24.}$ Práve keď bude loď z Cerisu odchádzať z prístavu, stretneme prvú loď ktorá vyplávala zo Sílthirmu pred 7 dňami. Poslednú stretneme práve keď budeme vchádzať do prístavu v Sílthirme o 7 dní neskôr. Teda prvá loď zo Sílthirmu, ktorú stretneme, vyplávala 7 dní pred vyplávaní tej našej a posledná, ktorú stretneme, vypláva 7 dní po nás. A, samozrejme, stretneme aj 13 lodí, ktoré vyplávali medzi tým. To nám spolu dáva 15 stretnutých lodí.

· *Tu začínajú riešenia pre kvartu* ·

$\boxed{25.}$ Medzi tromi zakukaniami uplynie 6 sekúnd, takže medzi každými dvomi uplynú tri sekundy. Medzi deviatimi zakukaniami musia tieto tri sekundy uplynúť osemkrát, takže uplynie spolu $8 \cdot 3 = 24$ sekúnd.

26. Je jedno číslo zložené z cifier 6,0,0 (600), štyri čísla z cifier 5,1,0 (510, 501, 150 a 105), štyri čísla z cifier 4,2,0 (420, 402, 240 a 204), tri z cifier 4,1,1 (411, 141 a 114), dve z cifier 3,3,0 (330 a 303), šesť z cifier 3,2,1 (321, 312, 231, 312, 132 a 123), a jedno z cifier 2,2,2 (222). Spolu ich je 21.

27.



28. Na obrázku je 11 štvorcov a 24 trojuholníkov.

29. Pred troma rokmi mal Eruanno x rokov, Táro mal $7x$ rokov. Pred dvoma rokmi mal Eruanno $x+1$ rokov a Táro $7x+1$ rokov. Táro bol štyrikrát starší, takže $4 \cdot (x+1) = 7x+1$ z čoho vieme, že $x = 1$. Teraz má Eruanno $x+3 = 4$ roky a Táro $7x+3 = 10$ rokov. Vlani mal Táro 9 a Eruanno 3, takže bol trikrát starší a o dva roky bude mať 12 a Eruanno 6 takže bude dvakrát starší, čím sme overili zvyšné podmienky zo zadania.

30. Ak je prvý výsledok o 15 764 väčší ako druhý, príklady vyzerajú nasledovne:

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 5\ 6\ 8 \\ 4\ 9\ 5\ 3\ 8 \\ \hline 8\ 5\ 1\ 0\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 7\ 3\ 2\ 7 \\ -\ \ 1\ 7\ 9\ 8\ 5 \\ \hline 6\ 9\ 3\ 4\ 2 \end{array}$$

Ak je druhý výsledok o 15 764 väčší ako prvý, príklady vyzerajú nasledovne:

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 5\ 6\ 8 \\ 1\ 9\ 6\ 0\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 1\ 7\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 7\ 3\ 2\ 5 \\ -\ \ 1\ 7\ 3\ 8\ 5 \\ \hline 6\ 9\ 9\ 4\ 0 \end{array}$$

31. Do jamky padne štvrtá Taurinova, piata Sardova, ôsma Taurinova, desiata Sardova, dvanásta Taurinova, pätnásta Sardova, šestnásta Taurinova, dvadsiata Taurinova a dvadsiata Sardova. V jamke je 9 guľôčok, každý hádzal 20-krát, takže mimo je 31 guľôčok. Po ďalších 20 hodoch každého pribudne do jamky 9 guľôčok, bude ich tam spolu 18. Vonku pribudne ďalších 31, čiže ich tam bude 62.

32. Ak máme v riadku alebo v stĺpci 4 čísla a vieme že súčet prvých troch je rovnaký ako súčet druhých troch, prvé musí byť rovnaké ako štvrté. Takto vieme do všetkých rohov doplniť číslo 29 a zvyšné čísla už dopočítame ľahko:

29	76	18	29
56	34	33	56
38	13	72	38
29	76	18	29

33. Zámok je vzdialený $24km$ a Fail ide rýchlosťou $6km/h$. Cesta mu teda bude trvať $\frac{24km}{6km/h} = 4hodiny$. Dráčik bude celé 4 hodiny lietať rýchlosťou $47km/h$, takže nalieta $4h \cdot 47km/h = 188km/h$.

34. Dĺžka záhrady je o 7 metrov väčšia ako šírka, takže rozmery záhrady sú $x \times (x + 7)$ metrov. Jej obvod je $4x + 14$ metrov. V záhrade po celom obvode postavíme chodník so šírkou jeden meter. Plocha ktorú zaberá je $(\text{obvod}) \times 1m - 4m^2$. $4m^2$ musíme odrátať, lebo $1m^2$ v každom rohu sme započítali dvakrát. Preto platí, že $(4x + 14)m \cdot 1m - 4m^2 = 50m^2$, z čoho úpravami dostávame $x = 10m$. Rozmery záhrady sú 10×17 metrov.

35. Štyria lovci ulovia za 3 hodiny 24 mamutov, takže ulovenie 48 mamutov im bude trvať dvakrát dlhšie, 6 hodín. Ak štyrom lovcom trvá ulovenie 48 mamutov 6 hodín, jednému by to trvalo 4-krát dlhšie, 24 hodín. Jeden lovec by lovil 48 mamutov 24 hodín, takže šiestim spolu to bude trvať 6-krát kratšie, teda štyri hodiny.

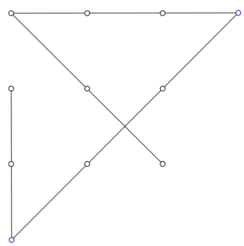
$\boxed{36.}$ Kváder s rozmermi 7, 8, 30 má objem $7 \cdot 8 \cdot 30 = 1680 cm^3$. Keď z každej steny odrežeme vrstvu s hrúbkou $1cm$, nové rozmery kvádra budú 5, 6 a 28 centimetrov, takže objem bude $5 \cdot 6 \cdot 28 = 840 cm^3$. Vidíme, že objem nového kvádra je polovičný oproti pôvodnému, takže ak pôvodný váži $4kg$, nový váži $2kg$.

$\boxed{37.}$ Naše tri po sebe idúce čísla si označíme $a-1$, a, $a+1$. Keď ich vynásobíme a pripočítame stredné číslo a, dostávame $1331 = (a-1) \cdot a \cdot (a+1) + a$ a úpravami dostávame $a \cdot (a-1) \cdot (a+1) + a = a \cdot (a^2 - 1) + a = a \cdot (a^2 - 1 + 1) = a^3$. $1331 = 11^3$, takže $a = 11$. A naozaj, $10 \cdot 11 \cdot 12 + 11 = 1331$.

$\boxed{38.}$ Alcarnacil zje za minútu $\frac{1}{4}$ koláča, Ciltalle $\frac{1}{6}$ koláča a Valmelind $\frac{1}{12}$ koláča. Za minútu teda spolu zjedia $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ koláča. Ak spolu za minútu zjedia polovicu koláča, zjedenie celého im bude trvať dve minúty.

.... *Tu končia riešenia pre primu* ....

$\boxed{39.}$ Riešenie je napríklad takéto:



$\boxed{40.}$ Rozdeľme si mince na tri štvorice a postupne odvážme štvoricu A so štvoricou B a B s C. Pokiaľ budú niektoré dve kôpky v rovnováhe, vieme, že falošná minca je v tretej a podľa váženia jednej z dvojice rovnakých s rôznou zistíme, či je falošná minca ľahšia alebo ťažšia ako pravá. Ak bude štvorica mincí A iná ako B aj ako C, je falošná minca v A-čku a vieme aj to, či je ťažšia alebo ľahšia ako pravé. Keď zistíme, v ktorej z počiatočných štvoríc je falošná minca, ostatné dve nás už nezaujímajú. Takže máme 4 mince a vieme, či je falošná minca ľahšia alebo ťažšia ako pravé. Čiže porovnaním dvoch a dvoch mincí zistíme, v ktorej dvojici je falošná minca. A, nakoniec, porovnaním posledných dvoch mincí zistíme, ktorá z nich je falošná. To sú dohromady 4 váženia.

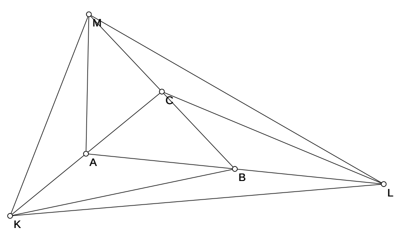
$\boxed{41.}$ Váha vreca je 25 kg vydelené štvrtinou jeho váhy, takže $x = \frac{25}{0.25x}$, z čoho dostávame $x \cdot 0.25x = 25$, $x^2 = 100$, teda $x = 10$ (keďže hmotnosť musí byť kladné číslo). Vrece váži 10 kg.

$\boxed{42.}$ Po tom ako prelejeme jednu naberačku zľava doprava a jednu rovnako veľkú sprava doľava, bude v obidvoch rovnako veľa tekutiny. Žiadnu tekutinu sme pri prelievaní nestratili, takže vody v kofole musí byť rovnako veľa ako kofoly vo vode. A teda je rovnako veľa kofoly v ľavom ako vody v pravom fúriku.

$\boxed{43.}$ Lichobežník je rovnoramenný, takže $|BC| = |AD| = |CD|$. Trojuholník BCD je teda rovnoramenný a $|uhol BDC| = |uhol DBC| = 35°$. Potom $|uhol BCD| = 180° - 2 \cdot 35° = 110°$. Takisto aj $|uhol CDA| = 110°$ a teda

$$|uhol ADB| = |uhol CDA| - |uhol CDB| = 110° - 35° = 75°$$

$\boxed{44.}$



Pozrime sa na trojuholníky ABC, ABK a BLK. Body K a C sú stredovo súmerné podľa bodu A, čo znamená, že ich vzdialenosti od priamky prechádzajúcej bodom A sú rovnaké. Z toho vyplýva, že výšky všetkých troch spomenutých trojuholníkov sú rovnaké, pretože výška je vzdialenosť buď bodu C alebo K od priamky AL. A keďže majú všetky tri trojuholníky rovnaké základne, aj ich obsahy sú rovnaké. Tú istú vlastnosť majú aj ďalšie dve trojice trojuholníkov, BCA, BCL a CML a CAB, CAM a AKM. To znamená, že trojuholník KLM je na obrázku rozdelený na 7 trojuholníkov so zhodnými obsahmi, čiže trojuholník ABC tvorí $\frac{1}{7}$ obsahu trojuholníka KLM.

$\boxed{45.}$ Polovica tretiny je $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ a tretina štvrtiny je $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$. V strede medzi $\frac{2}{24}$ a $\frac{4}{24}$ sú $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

$\boxed{46.}$ Aby bolo číslo deliteľné deviatimi, musí mať ciferný súčet deliteľný deviatimi. Teda ciferný súčet musí byť buď 9 alebo 18 (27 už je príliš veľa, na to by sme v čísle potrebovali mať tri deviatky). Ciferný súčet 9 spravím ako 7+2+0 a viem poskladať 4 čísla (720, 702, 270 a 207) alebo ako 5+2+2 a viem poskladať tri čísla (522, 252 a 225). Ciferný súčet 18 neviem dosiahnuť, lebo 5+5+7 je málo ale 5+7+7 je už veľa. Takže čísel je spolu 7.

· *Tu končia riešenia pre primu* ·

$\boxed{47.}$ Číslo 2176 si rozložíme na prvočísla: $2176 = 17 \cdot 2^7$. Aby boli obidva činitele dvojciferné čísla, musia byť buď $17 \cdot 2$ a 2^6, čiže 34 a 64, alebo $17 \cdot 2^2$ a 2^5, čiže 68 a 32. Ak im zmeníme poradie číslic a vynásobíme ich, dostávame $43 \cdot 46 = 1978$ alebo $86 \cdot 23 = 1978$. Takže vyhovujú obe dvojice, 34 a 64, aj 32 a 68.

$\boxed{48.}$ Číslo prislúchajúcemu každému vrcholu na podstave ihlanu je rovnaké, čiže aj číslo na každej bočnej stene telesa musí byť rovnaké (číslo jedného vrcholu je strana 1 + strana 2 + podstava a číslo vedľajšieho vrcholu je strana 2 + strana 3 + podstava, čiže číslo na strane 1 je také isté ako číslo na strane 3, atď.). Také isté číslo však má aj vrchný vrchol, v ktorom sa stretáva všetkých jedenásť bočných stien. Keď si číslo na každej bočnej stene označíme x a číslo na podstave p, platí, že $11 \cdot x = 2 \cdot x + p$, čiže $p = 9x$. Teda súčet čísel na všetkých stenách, čo je podľa zadania 60, je $11x + 9x = 20x$. Čiže $x = 3$ a každý vrchol má priradené číslo 33.

$\boxed{49.}$ Príklad si môžeme začať kresliť, a zistíme, že rovnako veľa strán ako uhlopriečok má 5-uholník a dvakrát viac uhlopriečok ako strán má 7-uholník. Alebo môžeme využiť, že konvexný n-uholník má $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ uhlopriečok - z každého bodu vedie uhlopriečka do všetkých bodov okrem troch (toho–ktorého bodu a bodov, s ktorými je spojený stranou). Polovica je vo vzorci preto, lebo predchádzajúcim spôsobom sme každú z uhlopriečok zarátali dvakrát. Z rovnice $\frac{n\cdot(n-3)}{2} = n$ dostávame nenulové riešenie $n = 5$, z $\frac{n\cdot(n-3)}{2} = 2n$ dostávame nenulové riešenie $n = 7$.

$\boxed{50.}$ $225 = 25 \cdot 9$. Aby bolo číslo zložené iba z núl a jednotiek deliteľné 25, posledné dvojčíslo musí byť 00. Aby bolo deliteľné deviatimi, musí byť jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi, teda musí obsahovať minimálne deväť jednotiek. Takže najmenšie číslo, ktoré je deliteľné 25 aj 9 je 11111111100.

$\boxed{51.}$ Za minútu sa koleso otočí 100-krát, takže za hodinu sa otočí $60 \cdot 100 = 6000$-krát. Za hodinu prejde koleso $3km = 3000m$, takže počas jedného otočenia prejde $\frac{3000m}{6000} = 0,5m$. Koleso má obvod 50 cm.

$\boxed{52.}$ Keby mali prví dvaja čierne klobúky, posledný by vedel, že má biely - prví dvaja majú biely-biely, biely-čierny, alebo čierny-biely. Keby druhý videl, že prvý má čierny klobúk, určite by vedel, že on má biely. A keďže nevedel, prvý elf musel mať biely klobúk.

$\boxed{53.}$ Na to, aby malo číslo ciferný súčin 6, musí obsahovať buď cifru 6 (a ľubovoľný počet jednotiek, ktoré ciferný súčin neovplyvňujú) alebo cifry 2 a 3 (a tiež ľubovoľný počet jednotiek). Preskúšajme obe možnosti:

- Výsledné číslo obsahuje cifru 6. Keďže vieme, že ciferný súčet hľadaného čísla je 7, musí okrem cifry 6 obsahovať práve jednu cifru 1. Z cifier 1 a 6 vieme zložiť jedno číslo deliteľné ôsmimi – 16.

- Výsledné číslo obsahuje cifry 2 a 3. Keďže vieme, že ciferný súčet hľadaného čísla je 7, musí okrem cifier 2 a 3 obsahovať ešte práve dve jednotky. Keďže má byť výsledné číslo deliteľné ôsmimi, určite musí byt párne. To znamená, že máme 3 možnosti, aké čísla môžeme vytvoriť – 1132, 1312 a 3112. Z nich sú deliteľné ôsmimi len dve – 1312 a 3112.

Čísla, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania, sú 3 – 16, 1312 a 3112.

$\boxed{54.}$ Označme si našich päť po sebe idúcich čísel ako (a-2), (a-1), a, (a+1) a (a+2). Podľa zadania teda má platiť:

$$
\begin{aligned}
(a-2)^2+(a-1)^2+a &= (a+1)^2+(a+2)^2 \\
a^2-4a+4+a^2-2a+1+a^2 &= a^2+2a+1+a^2+4a+4 \\
a^2-12a &= 0 \\
a(a-12) &= 0
\end{aligned}
$$

Čiže $a=0$ alebo $a=12$. Z toho vyplýva, že vlastnosť zo zadania majú pätice po sebe idúcich celých čísel -2, -1, 0, 1, 2 a 10, 11, 12, 13 a 14.