

Vzorové riešenia prvého kola letnej série 2003/2004

Prvá príhoda (opravovala Zuzka)

Najskôr si všimnime počet dverí, ktoré vedú do jednotlivých miestností. Je ich vždy párny počet (2, 4 alebo 6). Keď vojdem do niektorej miestnosti, počet otvorených dverí, vedúcich do nej, klesne o 1. A keď z nej vyjdem, počet otvorených dverí sa znova zníži o 1. Takže pri prechode miestnosťou klesne počet otvorených dverí, ktoré vedú do tejto miestnosti, celkovo o 2. Teda počet otvorených dverí do tejto miestnosti je zase párny (0, 2 alebo 4). A tak Etiénne putuje po dome a znižuje počet otvorených dverí do miestností. Ak sa do miestnosti znova vráti, neostane tam zavretý, lebo sa zopakuje to čo predtým (zostane 0 alebo 2 otvorených dverí, pochopiteľne do miestnosti, ktorá mala na začiatku iba 2 dvere sa nemôže vrátiť)... Takže Etiénne nemôže v dome ostať zavretý.

Druhá príhoda (opravovala Janka=)

Ukážeme si dva rôzne postupy:

1. Tento je viac matematický. Čísla, ktoré sa ukrývajú pod machuľami si označíme takto:

$$a : 15 = b \text{ z v. } c, \text{ z toho vyplýva, že } 15b + c = a$$

$$d : 15 = e \text{ z v. } f, \text{ z toho vyplýva, že } 15e + f = d$$

Zo zadania vieme, že súčet delencov, teda $a + d$, je 225. Obidve rovnice teda zrátame a dostaneme:

$$225 = a + d = 15b + 15e + c + f$$

Ďalej upravujeme:

$$225 - 15b - 15e = c + f$$

Keď vydelím celú rovnicu 15, na ľavej strane dostanem celé číslo, teda aj pravá strana musí byť deliteľná 15, aby sme dostali po vydelení to isté celé číslo:

$$15 - b - e = 15 \cdot (c + f)$$

Toto je jedno podstatné zistenie: súčet zvyškov musí byť deliteľný 15. Ale to nestačí, lebo by to mohlo byť pokojne napr. 45.

Dôležité je, že zvyšok nemôže byť väčší ako deliteľ (keby bol, ten by sme ešte vydělili, čím by sa zväčšil podiel a zvyšok by sa zmenšil). Napr. $32 : 15 \neq 1 \text{ z v. } 17$, ale $2 \text{ z v. } 2$. To je pochopiteľné, ale mnohí ste to nenapísali, takže ste na tomto strácali body.

Keďže sú zvyšky maximálne 14, ich súčet môže byť najviac 28. Jediné číslo deliteľné 15, ktoré je väčšie ako 5 a menšie ako 29, je 15.

2. 225 si pre zjednodušenie predstavím napr. ako fazuľky. Rozdelíme ich na 15 kôpok po 15. Vezmeme si jedného z delencov a vyberieme toľko celých kôpok, koľko potrebujeme. Fazuľky, čo chýbajú (ak nejaké chýbajú... ale ak nechýbajú, znamená to, že sú delence deliteľné bezo zvyšku, teda súčet zvyškov je nula, čo nevyhovuje zadaniu), oddelíme od ďalšej kôpky pätnástich. Toto bude zvyšok po vydelení (všetky ostatné fazule totiž vieme rozdeliť na kôpky po 15, veď už v nich sú). Tie, čo ostali, sú druhý delenec a jeho zvyšok bude zároveň zvyškom tej rozdelennej kôpky. Spolu sú teda zvyšky jedna celá kôpka, 15.

Toto druhé riešenie som vytvorila takým spojením vašich nápadov, možno sa to trochu ťažšie chápe takto napísané, skúste si to predstaviť popripade. berte fazule a ...;-)

Komentár: 2 body ste dostali za výsledok, +1b za postup typu „skúšaním mi vyšlo toto“, s tým, že ste tam aj popísali príklady, +1b za to, že ste dokázali, že je súčet zvyškov deliteľný 15 a plný počet ste mohli získať, len ak ste nezabudli, že je menší ako 30, 45, ... Individuálne som za rôzne chybičky v postupe strhávala 0,5–1 bod. Ale potešili ste ma, lebo ste to všetci vedeli, dokonca ste všetci aspoň čosi napísali do postupu, nenašlo sa čisto: „15“, čo sa stáva ☺. Majte sa!

Tretia príhoda (opravovali iFka a Laco)

Najskôr si uvedomíme, že keď je v miestnosti n hostí, počet všetkých podaní rúk bude $P = n \cdot (n - 1) : 2$, pretože n hostí si podá ruku každý s $(n - 1)$ hosťami (nie sám so sebou), ale každé podanie rúk je zarátané 2-krát (A s B = B s A). Dá sa to vyrátat' aj postupne: Prvý si podá ruku s $(n - 1)$ (okrem neho), ďalší s $(n - 2)$ (bez prvého, s ním si už ruku podal) ... , predposledný s 1 (s posledným). $P = n - 1 + n - 2 + \dots + 1$. Vieme, že $n \cdot (n - 1) : 2 < 80$ (zvyšok kráľ). Najväčšie možné prirodzené n , pre ktoré platí nerovnica je 13. Hostí nebolo viac ako 13. Ďalej vieme, že kráľ podal ruku maximálne n hosťom. Preto vylúčime možnosti $n < 13$. Ak $n = 12$,

$P = 66$ - kráľ by mal podať ruku 14-tim hosťom, ale toľko ich tam nebolo. Ak by bolo n menšie, musel by si podať ruku s viac ako 14-timi hosťami.

Hostí bolo 13. Medzi nimi bolo 78 podaní rúk, kráľ podal ruku 2 hosťom.

Komentár: Tento príklad bol celkom jednoduchý a zvládli ste ho vynikajúco 😊. Len by sme chceli upozorniť na niektoré detaily, čo ste robili zle. 0,5 + 0,5 bodu ste mohli mať strhnuté za to, že ste neukázali, že hostí nemôže byť viac alebo menej (ako ich skutočný počet). 1,5 bodu ste mohli získať za správny postup a princíp ako z počtu hostí získať počet podaní rúk. Za prípadné chýbajúce slovné vysvetlenie sme strhávali 0,5 bodu.

Štvrtá príhoda (opravovali Martin22 a Paľo)

Po niekoľkých pokusoch prideme na to, že je problém nájsť počty rýb v jednotlivých dňoch tak, aby strýko splnil svoj sľub aspoň sedem dní. Preto sa pokúsime ukázať, že sa to naozaj vôbec nedá. Predpokladajme, že strýko prvýkrát povedal svoje vyhlásenie 3. deň v mesiaci. Ak by však malo platiť až do 9. dňa v mesiaci (t.j. sedem dní), musel by v 5. deň chytiť menej rýb, v 7. ešte menej, v 9. ešte menej. Zároveň mal však vždy chytiť viac ako pred týždňom, teda v 2. deň musel chytiť menej ako v 9. A opäť: v 4. deň musel chytiť menej ako v 2., v 6. ešte menej, v 8. ešte menej a pred týždňom v 1. deň ešte menej. Keďže však predpokladáme, že v 3. deň má jeho výrok platiť, musel v tento deň chytiť menej ako v 3. deň. Ak si túto úvahu ešte raz (príp. neraz) prečítame, zistíme, že v 3. deň musel chytiť menej ako v 3. deň, čo je nezmysel. Svoje vyhlásenie teda nemohol dodržať sedem dní, nie to ešte 10. Na druhej strane, príklad denných počtov rýb tak, aby strýkovo vyhlásenie platilo šesť dní po sebe, nájdeme ľahko, napr.

Deň v mesiaci	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Počet rýb	4	8	3	7	2	6	1	5

V tejto tabuľke platí strýkovo vyhlásenie od 3. po 8. deň. (Môžeme predpokladať, že všetky predchádzajúce dni chytil 1 rybu.)

Komentár: Pokiaľ ste iba na príklade ukázali, že strýko môže svoje tvrdenie dodržať šesť dní (resp. päť, pokiaľ ste nerátali ten úplne prvý), ale chýbalo vám správne zdôvodnenie, prečo už sedem nie, dostali ste 3 body. Na druhej strane, nestačilo napísať, prečo to sedem dní nefunguje bez toho, aby ste uviedli príklad pre šesť dní. Vaše zdôvodnenie, že sedem dní je už veľa ešte nemusí znamenať, že šesť je už v pohode – je nevyhnutné seba (aj nás) o tom presvedčiť príkladom. Ak vám chýbal, máte 3,5 bodu. A napokon tí, ktorí si myslia, že ujo rybár môže dodržať svoj sľub iba päť dní (vrátane prvého) dostali 1,5 bodu. Ozaj, strýcovi srdečne blahoželáme k meninám, ktoré oslávi už o necelých sedem mesiacov!

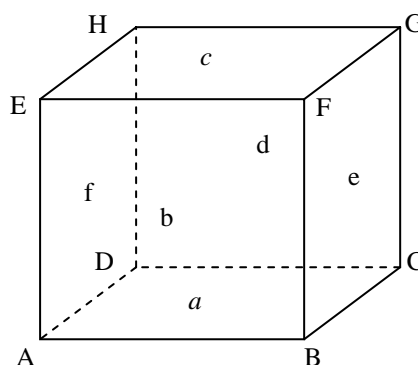
Piata príhoda (opravovali Blanka a Mišo)

Označme vrcholy drevenej kocky A, B, C, D, E, F, G, H . Ďalej označme steny nasledovne:

$ABCD = a, ABFE = b, EFGH = c, DCGH = d, BCGF = e, ADHE = f$.

Každý vrchol ma priradené číslo získané sčítaním čísel na jemu prislúchajúcich stranách. Teda: $A = a + b + f, B = a + b + e, C = a + d + e, D = a + d + f, E = b + c + f, F = b + c + e, G = c + d + e, H = c + d + f$. Keďže je všetkým vrcholom priradené rovnaké číslo, platia nasledovné rovnosti: $a + b + f = a + b + e = a + d + e = a + d + f = b + c + f = b + c + e = c + d + e = c + d + f$. Z uvedenej rovnosti jednoznačne vyplýva, že platí: $a = c, b = d, e = f$. (napr. z rovnosti $a + b + f = a + b + e$ vidieť, že $e = f$. Ostatné sa ukázu analogicky.) Teda sme ukázali, že na jednotlivých dvojiciach protiľahlých stien je napísané rovnaké číslo. Zo zadania platí, že súčet všetkých stien kocky je nepárne číslo. Matematicky zapísané: $a + b + c + d + e + f = 2k + 1$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Úpravou: (za predpokladu rovnosti čísel na protiľahlých stenách) $2 \cdot (a + b + c) = 2k + 1$, rovnicu vydělíme dvojkou: $a + b + c = k + 0,5$.

Táto rovnosť dokazuje, že neexistuje riešenie v celých číslach. Avšak takýchto trojíc reálnych čísel a, b, c (medzi číslami môže nastať aj rovnosť) ktorých súčet je $k + 0,5$, je naopak nekonečne veľa. Za daných podmienok neexistuje jednoznačné riešenie rovnice. Teda nájsť „všetky“ také možnosti očíslovania stien kocky, aby ich súčet bol nepárny, nie je možné, lebo ich je nekonečne veľa.



Komentár: Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo, že keď ste uvažovali iba prirodzené alebo celé čísla (v týchto prípadoch riešenie neexistuje) napriek tomu, že v zadaní nebol zadaný obor čísel, v ktorom sa má úloha riešiť. Za tento nedostatok sme však strhávali veľmi mierne, iba 1b, napriek tomu, že to celkom zmenilo výsledok príkladu. Tí riešitelia, ktorí uvažovali „reálne“, teda v obore reálnych čísel, si mnohokrát neuvedomili, že hľadané čísla nemusia mať zákonite za desatinnou čiarkou 5. Napríklad: ak $a = 1$, $b = 0,2$, $c = 0,3$, súčet je nepárny $\rightarrow 3$, ale 5-ky za desatinnou čiarkou nie sú! Najsprávnejšie bolo napísať jednoducho len to, že $a + b + c = k + 0,5$, $k \in \mathbb{Z}$, avšak tolerovali sme veľmi veľa iných zápisov riešení. Za to, že ste zistili, že na protíľahlých stenách musia byť rovnaké čísla bol 1b, ak ste to aj dokázali, ďalší 1,5b. Zvyšok riešenia (hlavne dôkaz, že pre celé čísla sa to nedá) bol tiež za 1,5b. Vyskytli sa aj iné osobité spôsoby riešenia, ktoré sme hodnotili individuálne.

Šiesta príhoda (opravoval aNTI)

Označíme si dĺžky strán obdĺžnikov na obr. 1 a obr. 2: Z obr. 1 vidno, že

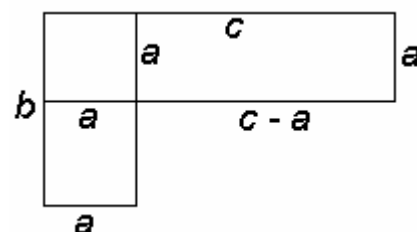
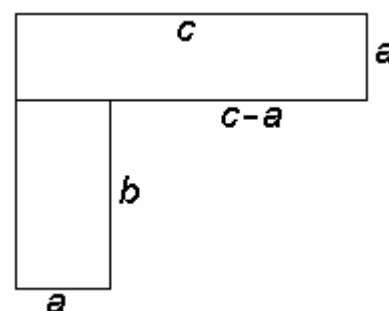
$$S_1 = 48 \text{ cm}^2 = a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$O_1 = 2 \cdot a + 2 \cdot b + c + (c - a) + a = 2 \cdot (a + b + c)$$

Vieme, že $13 \mid O_1$ (13 delí O_1), teda $13 \mid a + b + c$. Pritom S_1 je súčinom dvoch prirodzených čísel a a $(b + c)$, z čoho vyplýva, že a aj $(b + c)$ sú deliteľmi 48 , pričom $(b + c) = 48 : a$. Napíšeme si tabuľku pre a , $b + c$ t.j. deliteľov 48 a $O_1 = 2 \cdot (a + b + c)$. Dosadzujeme za a a skúmame, či je O_1 deliteľné 13 .

a	$b + c$	$O_1 = 2 \cdot (a + b + c)$
1	48	98
2	24	52
3	16	38
4	12	32

jediná možnosť kde $13 \mid O_1$



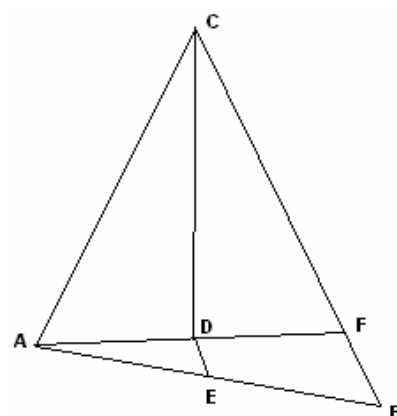
Väčšie a nemá zmysel skúšať, lebo už pri $a = 6$ neplatí $a < b$, $a < c$ (a má byť šírka). Vyjadríme si z druhého obrázka $O_2 = 2 \cdot a + b + c + (c - a) + (b - a) = 2 \cdot (b + c)$. Sem môžeme už rovno dosadiť zistenú hodnotu $(b + c) = 24$, teda $O_2 = 2 \cdot 24 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$.

Komentár: Väčšina z vás úlohu riešila takto a podobne, niektorí ste iba skúšali bez využitia deliteľnosti. Niektorí ste nepísali prečo netreba ďalej skúšať, príp. ste to zdôvodnili, že „ďalej to rastie...“. Celkovo príklad dopadol bodovo veľmi dobre. Za samotné riešenie bolo 2,5b. Ak ste vypísali svoje skúšanie $+0,5b$ až $+1b$. Ak ste skúšali delitele a nie len „od buka“ $+1b$. Ak ste vedeli prečo neskúšať ďalej $+0,5b$.

Siedma príhoda (opravoval Piščík)

Predĺžime si kolmicu AD na os uhla ACB a jej priesečník s BC si označíme F . Trojuholník AFC je rovnoramenný, lebo os uhla je kolmá na základňu, čo môže nastať len pri rovnoramenných trojuholníkoch. Teda CF je dlhá 14 cm , čiže FB je dlhá $19 - 14 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$. Ďalej v rovnoramennom trojuholníku platí, že D je stred AF , a keďže zo zadania je E stred AB , potom DE je stredná priečka trojuholníka ABF , teda platí, že dĺžka DE je polovicou dĺžky FB , čo je $5/2 = 2,5 \text{ cm}$.

Komentár: Príklad ste zvládli veľmi dobre, na postup ste prišli takmer všetci čo ste príklad poslali. Tak ako obvykle, za nedostatočné vysvetlenie som strhával nejaké bodíky, a to najčastejšie 1,5 bodu, keď ste nemali ani snahu vysvetliť, prečo je trojuholník AFC (možno ste si ho nazvali inak) rovnoramenný. Takže to bola aj vaša najčastejšia chyba, a touto vetou sa s vami aj lúčim, tak pa.



Ôsma príhoda (opravoval Michail)

Vieme, že hodnota, ktorú vydala mašina je nenulová, teda do nej kuchár dal viac ako $0T$. Keďže dostal $\approx 82\%$, dostal menej ako vložil. Vieme, že posledné tri cifry vloženeho môžu byť najviac 444 , inak dostane kuchár viac, ako vložil. Vloženú sumu si označme ako $1000a + b$, kde b sú jeho posledné tri cifry. Najmenej mohol zo stroja

dostať 81,5 % , teda platí: $0,815(1000a + b) \leq 1000a$, teda platí $(0,815 : 185)b \leq a$, a keďže b je prinajmenšom 0, teda $0 \leq a$.

Najviac mohol zo stroja dostať 82,499.. % teda menej, ako 82,5 % teda platí: $0,825 \cdot (1000a + b) > 1000a$ teda $(0,825 : 175)b > a$, a keďže b je prinajväčšom 444 tak $2,09 > a$, $2 \geq a$. Dostali sme podmienky, z ktorých plynie, že a môže byť 0,1,2. Ale a nemôže byť 0, pretože by kuchár dostal 0T. Ak $a = 1$, potom nám z dvoch hore uvedených vzťahov vyjde, že b je z 213,214, ... ,226. Ak je $a = 2$ potom nám vyjde, že b je z 425,426, ... ,453. Avšak b smie byť najviac 444, preto pre $a = 2$ je b z 425,426, ... ,444. Teda správne je riešenie: kuchár mohol vhodiť 1213,1214, ... ,1226,2425,2426, ... ,2444.

Komentár: Najviac z vás písalo znamienka rovnosti i tam, kde sa zaokrúhľovalo, strhol som za to 0,5 boda. Niektorí mali správny postup pre $a = 0, 1, 2$, ale nezdôvodnili, prečo a nesmie byť väčšie. Tiež som im strhol 0,5 b, ako i za iné malé chybičky. Viac bodov som strhol len ak bol celkový výsledok zlý.

Deviata príhoda (opravovali Andrej a Margo)

Hľadané prirodzené číslo má byť čo najmenšie a má sa skladať z číslíc 4 a 7 (niektorí si mysleli, že desiatková sústava sú len číslice 1,2,3,4,5,6,7,8 a 9. Pozor! DESIATKOVÁ sústava sa skladá z 10-ich číslíc (resp. zapisujeme v nej pomocou desiatich číslíc). Takže niektorým mohol vyjsť výsledok 7704, čo samozrejme nie je správne), a má ešte byť deliteľné 72.

Kritérium deliteľnosti 72 je deliteľnosť 8 a zároveň aj 9 ($8 \cdot 9 = 72$). Čísla, ktoré nám pomôžu rozdeliť dané číslo musia byť nesúdeliteľné! Použiť môžeme aj rozklad prvočísel. Teda naše hľadané číslo

- Musí mať posledné 3-číslie deliteľné 8 (kritérium pre 8)
- Musí mať ciferný súčet deliteľný 9 (kritérium pre 9)

3-ciferné a menšie číslo, zostavené len zo sedmičiek a štvoriek, deliteľné 72 neexistuje. Zistíme to napr. kombináciami. Kombináciami číslíc 4 a 7 sa dá zostaviť jediné trojčíslicie, ktoré bude deliteľné 8, a to je 744. Jeho ciferný súčet bude $7 + 4 + 4 = 15$. Ciferný súčet čísla má byť deliteľný 9, takže to musia byť jeho násobky (9,18,27,36,45...). Najbližší cif. súčet, ktorý by nám vyhovoval, je 18, ale ten nemôžeme dosiahnuť ($15 + 4 > 18$). Teda skúsime hľadať pre 27. Do tohto súčtu nám chýba ešte 12. Z daných číslíc vieme spraviť jedine $4+4+4$. Z toho nám vznikne číslo **444744**.

Je to správny výsledok, ale musím poznamenať, že bolo dôležité napísať ešte, že číslo môže mať menší cif. súčet, a pritom môže byť väčšie. (číslo 77744 má ciferný súčet 28 (teda väčší ako 444744) a pritom je menšie). Síce to v danom prípade nezaváži, ale bolo to treba spomenúť. Je to predsa len 9. príklad (teda najťažší).

Komentár: Príklad bol riešený väčšinou podobne, a to hore uvedeným spôsobom. Niektorí ste tvrdili, že ste iba ťukali do kalkulačky, ale pri priemernom ťuknutí 3 za sekundu by ste museli ťukať vyše 34 minút... ☺ Bodovali sme každé riešenie viac-menej individuálne, pretože väčšina bola správna. Strhávali sme 0,5 b za už vyššie spomenutú chybu.

Prémiová príhoda (opravovala Janka ☺)

Preklad: Máš prázdnu miestnosť a štyri osoby čakajúce pred miestnosťou. V každom kroku môžeš byť jednu osobu vpustiť do miestnosti, alebo jednu vypustiť von. Môžeš robiť postupné kroky tak, že každá možná kombinácia ľudí v miestnosti nastane presne raz?

Označme si štyri osoby Adolf (A), Bill (B), Caesar (C), a Džaváharlál (D) – označenie podľa Jonáša ☺ Vypíšme si, aké kombinácie sa majú vyskytnúť v miestnosti:

štyria: ABCD, traja: ABC, ABD, ACD, BCD, dvaja: AB, AC, AD, BC, BD, CD, jeden: A, B, C, D, nikto: –

Teraz už stačilo vyskúšať a nájsť vhodnú možnosť krokov.

Napríklad (vypisujem len ľudí, čo sa práve nachádzajú v miestnosti):

1. –, A, AB, ABC, ABCD, ABD, AD, D, CD, ACD, AC, C, BC, BCD, BD, B
2. –, A, AB, B, BC, C, AC, ABC, ABCD, ACD, AD, ABD, BD, D, CD, BCD
3. –, A, AB, ABC, AC, C, CD, BCD, BC, B, BD, ABD, ABCD, ACD, AD, D

Takže teraz už vidieť, že taká postupnosť krokov existuje.

Komentár: Veľa z vás dostalo 3 body (samozrejme, stačilo ukázať jednu postupnosť). Trošku som bola smutná z toho, že ste zabúdali na možnosť, že nikto v miestnosti nie je, vtedy ste dostali len 2,5 boda. Ak vám chýbala nejaká možnosť vo vašom postupe, alebo sa nejaká opakovala, mohli ste dostať najviac 1,5 boda. To je asi všetko. Tak teda veľa šťastia v ďalšej sérii, nech sa vám darí... a prichystajte sa na Veľkú noc ☺