Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2009/2010

Príklad č. 1 (opravovali Uľa, Phil):

Zadanie:

Riešenie: Mená všetkých v rodine sú: Peter, Edmund, Susan, Lucy a Andrea. Vieme, že v rodine sú 2 muži a 3 ženy, z toho 1 je chlapec a 2 sú dievčatá, teda deti, pričom zo zadania vyplýva, že osoba, ktorú hľadáme je jedno z detí. Keďže má jedného brata a jednu sestru, určite je dievča. Môže to byť Andrea, Susan alebo Lucy.

Rozoberieme si nasledujúce vety zo zadania: „Andrea je mladšia, ako ja". Z tejto vety zistíme, že dievča, ktoré hľadáme má sestru Andreu (ktorá je od nej mladšia). Dievča sa môže volať Susan alebo Lucy. Z nasledujúcej vety: „Lucy je staršia ako Susan," určíme, ktorá bude mama dievčaťa a ktoré bude dievča, ktoré hľadáme. Mama je staršia, takže Lucy a mladšie bude dievča, Susan. Dievča, ktoré hľadáme je dcéra Susan. Môžeme ešte zistiť ktoré je otec dievčaťa a koré je jeho brat, keď sa pozrieme na ďalšiu vetu: „Peter je tiež mladší ako ja." Vieme určiť, že Peter je jej brat, pretože otec je od nej starší. Otec sa volá Emanuel.

Odpoveď: Je to Susan.

Komentár: Príklad bol jednoduchý, takže z našich všetkých riešení(2) dostal každý 10 bodov.

Príklad č. 2 (opravovali Betka, Andy, Henry):

Zadanie:

Riešenie: Podľa podmienok, ktoré boli v zadaní vieme zistiť, že prvky skupiny I môžu byť len na dvoch miestach (a to v dvoch horných rohoch). Vieme, že prvky skupiny I majú byť iba v rohu a zároveň nemôžu byť v tom istom riadku, alebo stĺpci ako prvky skupín A a E. Ďalej vieme, ze prvky skupiny A môžu byť len v spodnom riadku, takže v ňom nemôžu byť aj prvky I.

Vyberieme si prvú možnosť. Máme prvky I v ľavom hornom rohu. Vieme, že prvky A sa musia nachádzať v dolnom riadku a nemôžu sa nachádzať v úplne ľavom stĺpci. Máme dve možnosti, kde sa nachádzajú prvky A.

Vyberieme si možnosť, v ktorej sú prvky A v pravom dolnom rohu. Pre prvky E ostáva stredné políčko, pretože prvky A, I a E nemôžu byť v tom istom stĺpci ani riadku. Prvky B a E majú byť v tom istom stĺpci a zároveň prvky B nemôžu susediť s prvkami A, lebo v abecede idú za sebou. Takže prvky B budú v hornom riadku v strede. Prvky skupiny F nemôžu byť v úplne pravom stĺpci a taktiež nemôžu susediť (dotýkať sa stranou) s prvkami E a G, takže ich umiestnime do ľavého dolného rohu. Vieme, že prvky H majú byť tiež v rohu, tak ich doplníme do posledného voľného rohu, pravého horného. Niekde potrebujeme umiestniť prvky skupiny D. Ostali nám tri voľné miesta, stred ľavého aj pravého stĺpca a stred dolného riadku. Všetky tieto miesta sú však susedmi skupiny E na strednom políčku. Prvky skupín D a E nemôžu byť na vedľajších políčkach, lebo v abecede nasledujú za sebou, a preto nám táto možnosť nevyhovuje.

I	B	H
?	E	?
F	?	A

Tabuľka 1: nesprávny postup, nemáme kam umiestniť prvky D

Skúsime iný postup. Tentokrát umiestnime prvky A do stredu dolného riadku pričom prvky skupiny I sú stále v ľavom hornom rohu. Môžeme doplniť prvky E, do stredu pravého stĺpca. Ďalej prvky B môžu byť iba v pravom hornom rohu (aby boli v tom istom stĺpeci ako prvky E a zároveň nesusedili s prvkami A). Teraz nájdime miesto pre prvky C a G. Vieme o nich, že musia byť v rovnakom riadku. Voľné miesto je v dolnom a strednom riadku. V spodnom sú však voľné iba rohové políčka. Na jednom z týchto rohových políčok budú prvky H, lebo ostatné rohy sú už obsadené. Pre prvky C a G zostal teda stredný riadok. Ich konkrétne rozmiestnenie zatiaľ neurčíme. Prvky skupiny D nesmú byť v spodnom riadku. Posledné vhodné miesto pre nich je teda stredné políčko v hornom riadku. Prvky F musia byť v ľavom dolnom rohu, pretože nesmú byť v pravom stĺpci a ostatné miesta sú obsadené. Do posledného voľného rohu, pravého dolného, doplníme H. Ostalo nám už len určiť polohu C a G v strednom riadku. Aby sa písmená, ktoré idú v abecede za sebou nedotýkali, tak prvky C budú v strednom riadku vľavo a prvky G v strede. Táto možnosť spĺňa všetky podmienky zo zadania.

I	D	B
C	G	E
F	A	H

Tabuľka 2: riešenie príkladu 2

Môžu však existovať viaceré riešenia, a preto musíme skontrolovať všetky možnosti. Preskúmame druhú možnosť umiestnenia skupiny I a to pravý horný roh. Tak isto ako v prvej možnosti, aj tu máme dve rôzne umiestnenia skupiny A.

Ako prvé si môžeme vybrať umiestnenie skupiny A v ľavom dolnom rohu. Hneď si vieme doplniť skupinu E do stredu. Potom vieme, že skupina B musí byť v hornom riadku v strede (aby bola v tom istom stĺpci ako skupina E a zároveň nesusedila so skupinou A). Skupina F bude v ľavom hornom rohu (nesmie byť v úplne pravom stĺpci a nesmie susediť so skupinou E). Skupinu H umiestnime do pravého dolného rohu, pretože je to posledný voľný roh. Rovnako ako v prvej možnosti teraz potrebujeme umiestniť prvky skupiny D. Ostali nám voľné iba miesta susediace so skupinou E. Tým pádom ho nevieme nikam uložiť a táto možnosť musí byť nesprávna.

Nakoniec ešte preskúmame druhé umiestnenie skupiny A v dolnom riadku v strede. Opäť môžeme doplniť E do ľavého stĺpca do stredu. Skupina B je teda v ľavom rohu v hornom riadku (aby bola v tom istom stĺpci ako skupina E a tiež nesusedila

F	B	I
?	E	?
A	?	H

Tabuľka 3: nesprávny postup, nemáme kam umiestniť prvky D

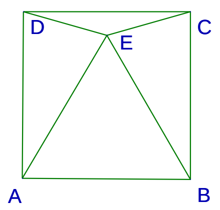
so skupinou A). Pokračujeme so skupinou F, ktorú umiestnime do horného riadku do stredu (nesmie byť úplne v pravom stĺpci a nesmie susediť so skupinou E). Ostali nám neobsadené dve miesta v strednom riadku a dve v dolnom. Vieme, že prvky C a G musia byť v tom istom riadku. Pre zvyšné dva prvky ostali určite miesta tiež v jednom riadku. To v našom prípade znamená, že prvky D a H sú v rovnakom riadku. Keďže prvky H majú byť v rohu, tak budú v spodnom riadku. To porušuje podmienku, že prvky D nemajú byť v dolnom riadku. Vidíme, že ani tento postup nie je správny.

B	F	I
E	?	?
?	A	?

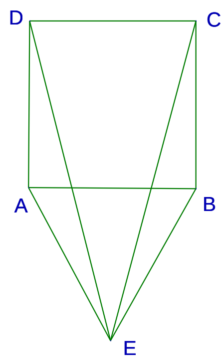
Tabuľka 4: nesprávny postup, nemáme kam umiestniť prvky D

Odpoveď: Skupiny prvkov sú v štvorcovej sieti rozmiestnené nasledovne: v hornom riadku I, D, B; v strednom riadku C, G, E; a v spodnom riadku F, A, H. Pozri tabuľku 2.
Komentár: Príklad bol ľahký, všetci ho zvládli bezchybne.

Príklad č. 3 (opravovali Emil, Jančo):
Zadanie:
Riešenie: Tak ako pri väčšine geometrických úloh aj tu je dobré načrtnúť si zadanie (obrázky č. 1 a 2). Sú práve dve možnosti, kde môže ležať bod E – v jednej bude ležať mimo štvorca a v druhej vnútri štvorca. Keďže $ABCD$ je štvorec, jeho vnútorné uhly majú veľkosť 90 stupňov. Tiež vieme, že uhly v rovnostrannom trojuholníku ABC majú veľkosť 60 stupňov.



Obrázok 1: prvá možnosť



Obrázok 2: druhá možnosť

Pri prvej možnosti umiestnenia bodu E (kedy bude ležať vnútri štvorca), bude platiť $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABE| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Všimnime si, že strany EB a BC sú rovnako dlhé ($ABCD$ je štvorec, ABE rovnostranný trojuholník, preto $|BC| = |AB| = |EB|$), a preto je trojuholník EBC rovnoramenný. Uhly BCE a CEB majú teda rovnakú veľkosť, ktorú môžeme vypočítať nasledovne:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle EBC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle CEB| &= 180^\circ \\
|\sphericalangle EBC| + 2 \cdot |\sphericalangle CEB| &= 180^\circ \\
2 \cdot |\sphericalangle CEB| &= 180^\circ - |\sphericalangle EBC| \\
|\sphericalangle CEB| &= \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} \\
|\sphericalangle CEB| &= 75^\circ
\end{aligned}$$

Keďže trojuholník AED je zhodný s trojuholníkom BCE ($ABCD$ je štvorec, ABE rovnostranný trojuholník, preto $|BC| = |AD|$, $|AE| = |EB|$ a $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EBC| = 30^\circ$), tak platí $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle CEB| = 75^\circ$. No a teraz už vieme vypočítať veľkosť uhla DEC:

$$\begin{aligned}360^\circ &= |\sphericalangle AEB| + |\sphericalangle BEC| + |\sphericalangle CED| + |\sphericalangle DEA| \\ 360^\circ &= 60^\circ + 75^\circ + |\sphericalangle CED| + 75^\circ \\ |\sphericalangle CED| &= 150^\circ\end{aligned}$$

Pri druhej možnosti umiestnenia bodu E platí $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ABE| = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Aj tu platí, že strany EB a BC sú rovnako dlhé ($ABCD$ je štvorec, ABE rovnostranný trojuholník, preto $|BC| = |AB| = |EB|$) a preto je trojuholník EBC rovnoramenný. Uhly BCE a CEB majú teda rovnakú veľkosť, ktorú teraz môžme vypočítať nasledovne:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle EBC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle CEB| &= 180^\circ \\ |\sphericalangle EBC| + 2 \cdot |\sphericalangle CEB| &= 180^\circ \\ 2 \cdot |\sphericalangle CEB| &= 180^\circ - |\sphericalangle EBC| \\ |\sphericalangle CEB| &= \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} \\ |\sphericalangle CEB| &= 15^\circ\end{aligned}$$

Keďže trojuholník AED je zhodný s trojuholníkom BCE ($ABCD$ je štvorec, ABE rovnostranný trojuholník, preto $|BC| = |AD|$, $|AE| = |EB|$ a $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EBC| = 150^\circ$), tak platí $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle CEB| = 15^\circ$. Z čoho vieme vypočítať veľkosť uhla DEC aj pre tento prípad:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle AEB| &= |\sphericalangle BEC| + |\sphericalangle CED| + |\sphericalangle DEA| \\ 60^\circ &= 15^\circ + |\sphericalangle CED| + 15^\circ \\ |\sphericalangle CED| &= 30^\circ\end{aligned}$$

Odpoveď: Ideálny uhol CED má veľkosť 150 alebo 30 stupňov.
Komentár: Viacerí z vás zrejme prehliadli poznámku v zadaní, ktorá pripomínala, že úloha má dve riešenia. To, že rovnostranný trojuholník ABE má byť zostrojený nad stranou AB neznamená, že v obrázku musí ležať nad stranou AB, ale skôr, že má so stranou AB spoločnú stranu. Preto musíme rátať s oboma možnými rovnostrannými trojuholníkmi ABE. Tí z vás, ktorí mali iba jedno riešenie, dostali najviac 6 bodov. Niektorým sme tiež strhli body za nedostatky v postupe.

Príklad č. 4 (opravovali gubika, Mária):
Zadanie:
Riešenie: Najskôr sa pozrieme na prvých šesť výrokov zo zadania. Okrem tretieho a štvrtého, ktoré spolu súhlasia, každý hovorí o inom počte klamajúcich. Z toho vyplýva, že z výrokov 1 až 6 môže byť pravdivý len jeden, prípadne dvojica tretí a štvrtý.

Poslední dvaja o ktorých vieme, že je medzi nimi určite Liquis, tvrdia „Ja som klon" a „Ja som pravý Liquis". Keby klamal iba jeden z nich, muselo by platiť, že sú obaja klonmi alebo obaja Liquismi. Teda musia buď obaja klamať alebo obaja hovoriť pravdu.

Teraz si rozoberieme situácie, ktoré by vznikli, keby boli pravdivé postupne všetky z prvých šiestich tvrdení.

- Ak by bola pravdivá prvá veta, muselo by byť 7 viet nepravdivých, teda všetky ostatné. V tomto prípade by bol Liquis osobou, ktorá tvrdí „Ja som klon", teda číslo 7.
- Ak by bola pravdivá veta číslo dva, muselo by byť nepravdivých práve šesť viet, teda pravdivá by bola práve jedna ďalšia. V tomto prípade sú vety 1, 3, 4, 5 a 6 určite nepravdivé, lebo sa s vetou 2 vylučujú. Pravdivá by teda mala byť práve jedna z viet 7 alebo 8 a to nie je možné – obe musia byť buď pravdivé, alebo nepravdivé, teda veta číslo 2 pravdivá byť nemôže.
- V prípade, že je pravdivá veta číslo 3, tak je zároveň pravdivá aj veta číslo 4, čo platí aj opačne. Okrem týchto dvoch by musela byť pravdivá ešte práve 1 veta. Tu sa dostávame k rovnakému sporu ako v predošlom prípade, z viet 7 a 8 nemôže byť pravdivá len jedna. Vety 3 ani 4 pravdivé byť nemôžu.
- V ďalšom prípade, ak by bola pravdivá veta číslo 5, by okrem nej mali byť pravdivé aj ďalšie tri vety. No vety 1 až 4 ani veta 6 pravdivé byť nemôžu, teda ani táto možnosť nie je správna.
- V poslednom prípade, ak by bola pravdivá šiesta veta, potrebovali by sme okrem nej ešte 4 ďalšie pravdivé vety. Teda z rovnakého dôvodu ako v predchádzajúcom prípade, ani táto možnosť nie je správna.

Vyčerpali sme všetky možnosti a vyšla nám jediná, podľa ktorej je Liquis číslo 7.
Odpoveď: Liquis je siedmym a klon ôsmym.
Komentár: Príklad takmer všetci z vás zvládli a mnohí nás potešili peknými, desaťbodovými riešeniami. Bodíky sme vám strhávali za nedostatočné odôvodnenia niektorých možností alebo za nedokončené riešenia. Celkovo vám príklad nerobil problémy.

Príklad č. 5 (opravovali Monča, Juro):
Zadanie:
Riešenie: Keby bolo hľadané číslo dvojciferné, súčet čísel po všetkých zámenách poradia cifier je určite menší ako $99+99 = 198$. Bude mať teda viac ako dve cifry.

Poďme sa pozrieť, či môže byť štvorciferné. Keby malo všetky cifry rovnaké, nedali by sa nijak zameniť, teda číslo samotné by sa muselo rovnať 4218, čo nemôže platiť. V prípade, že cifry sú rôzne, súčet všetkých obmien čísla bude väčší ako 4218 (s výnimkou čísel 1001 a 1011, kde však rovnako súčet 4218 nedostávame). Hľadané číslo je určite trojciferné.

Taktiež musí platiť, že všetky cifry tohto čísla budú rôzne. Keby nejaké dve boli rovnaké, zámenou poradia cifier dostávame najviac tri rôzne čísla, ktorých súčet bude určite menší ako $999 \cdot 3$. Cifry hľadaného čísla si označme A, B a C. Čísla, ktoré dostávame zámenou poradia cifier sú: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Keď je nejaké číslo, ktoré sa skladá z cifier X, Y a Z zapísané v tvare XYZ, znamená to, že počet jeho stoviek je X, počet desiatok Y a počet jednotiek Z, teda $XYZ = 100 \cdot X + 10 \cdot Y + 1 \cdot Z$.

Vieme, že súčet čísel získaných zámenou poradia cifier čísla ABC je rovný 4218. V týchto 6 možnostiach je každá z cifier A, B a C práve dvakrát na mieste stoviek, desiatok aj jednotiek. Keď teda sčítame všetky tieto čísla, dostávame súčet $222 \cdot A + 222 \cdot B + 222 \cdot C$, čo má byť podľa zadania rovné 4218. Platí, že keď $222 \cdot X = 222 \cdot Y$, potom $X = Y$. Preto platí aj $222 \cdot (A + B + C) = 4218 \Rightarrow (A + B + C) = 19$. Zistili sme, že súčet cifier hľadaného čísla je 19.

Poďme nájsť najväčšie možné číslo. Najväčšie bude ak prvá cifra bude 9, čo môže byť. Druhá môže byť 8 (nemôže byť 9, lebo cifry sú rôzne) a tretia cifra je potom $19-9-8 = 2$. Najväčšie číslo bude 982. Najmenšie vytvoríme podobným spôsobom, len opačne. Prvá cifra však nemôže byť 1, lebo súčet ďalších dvoch by musel byť 18, čo by mohlo byť len 9+9, to sú však rovnaké cifry. Prvá cifra bude 2, a potom druhá bude 8 a tretia 9. Najmenšie číslo bude 289.

Pomocou peňazí v hodnotách 100 korún, 10 korún a 1 koruna vyplatíme 982 korún pomocou 9 100-korunáčok, 8 10-korunáčok a 2 korunových mincí, 289 pomocou 2 100-korunáčok, 8 10-korunáčok a 9 korunových mincí, čo je v oboch prípadoch 19 kusov.

Odpoveď: Dá mu najmenej 289 a najviac 982 korún. Čudák má vo vrecku spolu 19 kusov mincí a bankoviek.

Komentár: Na riešenie príkladu mnohí z vás prišli. Problémy vám robilo len vylúčenie každej možnosti, ako napríklad počet cifier alebo súčet cifier v čísle. Za to sme bohužiaľ museli strhnúť body. Niektorí z vás pozabudli na časť odpovede, pretože sme sa pýtali na viac vecí, takže nabudúce pozorne čítať riešenie:). Inak sme s vašimi riešeniami boli spokojní a s radosťou sme rozdávali veľa bodov.

Príklad č. 6 (opravovali Peťo, ViRPo):

Zadanie:

Riešenie: Hľadané dvojciferné číslo si označíme XY. Pri jeho zisťovaní nám pomôžu pravidlá deliteľnosti. Vieme, že každé číslo deliteľné štyrmi musí mať posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi. Ak si teda do hľadaného čísla XY vložíme číslo 27, tak z čísla X27Y musí byť 7Y deliteľné štyrmi. V tom prípade musí byť Y číslo 2 alebo 6.

Pravidlo deliteľnosti tromi hovorí, že ak je ciferný súčet čísla deliteľný tromi, tak aj celé číslo je deliteľné tromi. Rozpíšeme si obe možnosti pre Y a pomocou deliteľnosti tromi dorátame príslušné X:

- Ak by Y bolo 2, musí byť v X352 X rovné 2, 5 alebo 8
- Ak by Y bolo 6, musí byť v X356 X rovné 1, 4 alebo 7

Vzniklo nám šesť rôznych možností pre XY: 22, 52, 82, 16, 46 a 76.

Ak medzi ne vložíme číslo 63 vieme, že vzniknuté číslo má byť deliteľné jedenástimi. Pravidlo deliteľnosti jedenástimi znie: Ak je rozdiel súčtu číslic na párnom a nepárnom mieste deliteľný číslom 11, tak je aj dané číslo deliteľné číslom 11. Pri šiestich možnostiach je pre nás oveľa výhodnejšie dané čísla (2632, 5632, 8632, 1636, 4636 a 7636) jednoducho vydeliť. Po delení jedenástimi nám vyjde, že z týchto štvorciferných čísel je iba číslo 5632 deliteľné číslom 11. Odstránením stredných cifier 6 a 3 dostaneme naše hľadané číslo: $XY = 52$.

Odpoveď: Bolo to dvojciferné číslo 52.

Komentár: Príklad väčšina z vás zvládla na 10 bodov, niektorí však napríklad použili pravidlá deliteľnosti bez toho, aby povedali ako znejú a za to išli body trocha dole... Ale máme z vás radosť. :)

Príklad č. 7 (opravovali Kozzy, Baja, Marka):

Zadanie:

Riešenie: Zo zadania vyplýva, že každý má len jeden hlas a vždy volil chlapec dievča a dievča volilo chlapca. Keďže sa volili do kruhu, tak každý niekoho volil a bol niekým volený.

Navyše je daných týchto 5 podmienok:

1. $Brandon \rightarrow d \rightarrow ch \rightarrow Brendy$
2. $Steve \rightarrow d \rightarrow ch \rightarrow Kelly$
3. $Dylan \rightarrow d \rightarrow David$
4. Val NEVOLILA $Steva$
5. $Donna \rightarrow ch$, ktorý NEVOLIL Val

To znamená, že do kruhu to vyzerá asi ako na obrázku 3.

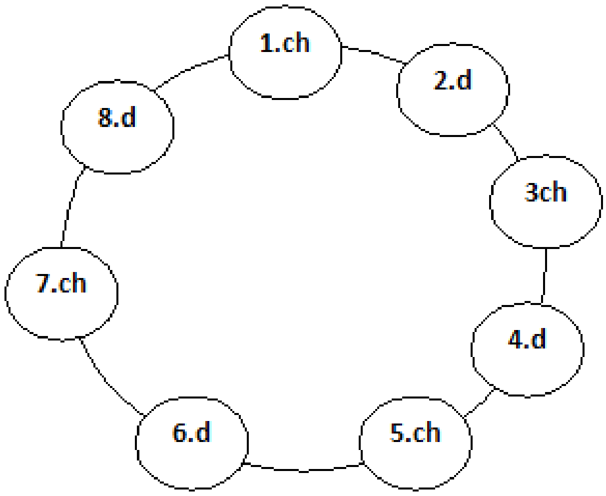
Ja si to ale budem písať do riadku asi takto:

$$1.ch \rightarrow 2.d \rightarrow 3.ch \rightarrow 4.d \rightarrow 5.ch \rightarrow 6.d \rightarrow 7.ch \rightarrow 8.d \longrightarrow 1.ch$$

kde ch–chlapec, d–dievča, čísla označujú miesta v kruhu a $\rightarrow$ znamená volil.

Nakoľko sa navrhovali do kruhu bez ujmy na všeobecnosti si môžem na prvé miesto umiestniť Brandona. Podľa 1. podmienky bude Brendy na štvrtom mieste.

$$Brandon \rightarrow 2.d \rightarrow 3.ch \rightarrow Brendy \rightarrow 5.ch \rightarrow 6.d \rightarrow 7.ch \rightarrow 8.d \longrightarrow Brandon$$



Obrázok 3: Takto to vyzerá dokruhu

Podľa 3. podmienky musí byť medzi Dylenom a Davidom len jedno dievča. To znamená, že budú buď na 3. a 5. mieste alebo 5. a 7. mieste. V každom prípade bude teda na 5. mieste jeden z nich, a preto tam určite nebude Steve. Keďže Steve nebude na 5. mieste, určite ho nenavrhla Brendy, ktorá je na 4. mieste. Podľa 4. podmienky ho nenavrhla ani Val a keďže Steve navrhol dievča, ktoré navrhlo chlapca, ktorý navrhol Kelly (2. podmienka), nenavrhla Steva ani Kelly. Teda Steva určite navrhla Donna.

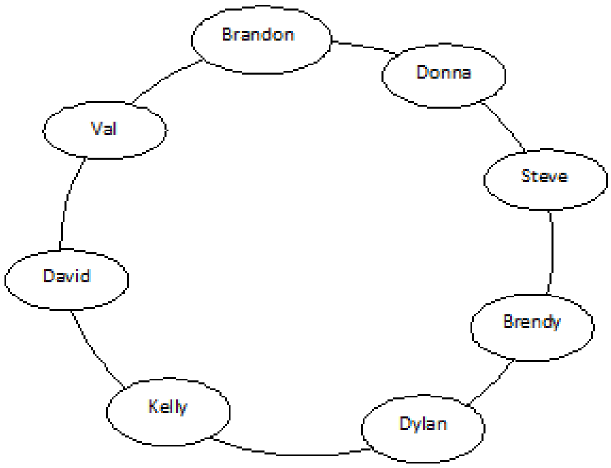
Poďme sa pozrieť, koho mohol navrhnúť Steve. Nakoľko Donna navrhla chlapca, ktorý nenavrhol Val (5. podmienka) a my už vieme, že Donna navrhla Steva a teda Steve určite nenavrhol Val. Navrhovali sa do kruhu, takže keď Donna navrhla Steva, Steve nenavrhol Donnu. A napokon z 2. podmienky zo zadania (o Stevovi a Kelly) vyplýva, že Steve nenavrhol Kelly. Steve teda mohol navrhnúť jedine Brendy a teda bude na 3. mieste. Z toho nám vyplýva, že Kelly bude na 6. mieste a na 8. bude posledné neumiestnené dievča teda Val. Keďže práve ten, kto sa nachádza na 8. mieste navrhol Brandona, poznáme už odpoveď na otázku zo zadania: Brandona navrhla Val.

$$Brandon \rightarrow Donna \rightarrow Steve \rightarrow Brendy \rightarrow 5.ch \rightarrow Kelly \rightarrow 7.ch \rightarrow Val \longrightarrow Brandon$$

Napriek tomu, že úlohu už máme vyriešenú, zistime ešte pozíciu Dylana a Davida. Možnosť, že Dylan a David sú na 3., respektíve 5. mieste, sme vylúčili (lebo na treťom už je Steve). Určite budú na 5. a na 7. mieste. Navrhovali sa teda nasledovne:

$$Brandon \rightarrow Donna \rightarrow Steve \rightarrow Brendy \rightarrow Dylan \rightarrow Kelly \rightarrow David \rightarrow Val \longrightarrow Brandon$$

V kruhu by to vyzeralo ako na obrázku 4.



Obrázok 4: Ide sa v smere hodinových ručičiek.

Odpoveď: Dievča, ktoré volilo Brandona, je Val.

Komentár: Mnohým z vás sa podarilo úplne vyriešiť príklad a dostali ste plný počet bodov, čomu sa veľmi tešíme. Ale našli sa aj takí, čo len skrátka skúšali a chýbal im postup, za čo sme museli strhnúť nejaké body.

Príklad č. 8 (opravovala Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Najprv sa pozrieme ako funguje vyfarbovanie čísel. Vieme, že ak je rozdiel medzi dvomi číslami 7 alebo 11, musia byť tieto čísla vyfarbené rovnakou farbou. Z toho si vyvodíme vzťah vzhľadom na jedno číslo: ak je číslo x modré, musia byť modré aj čísla $x-7$, $x-11$, $x+7$, $x+11$.

Najprv skúsime zistiť, či môžeme vyfarbovať čísla pre ľubovoľné n, tak aby boli použité obidve farby a aby platila rovnofarebnosť čísel x, $x-7$, $x-11$, $x+7$ a $x+11$.

Skúsme si prípad, v ktorom budú čísla v intervale od 0 po 6 rovnakej farby. Použijeme podmienku rovnofarebnosti čísel: $0+7=7$, $1+7=8$, $2+7=9$, $3+7=10$, $4+7=11$, $5+7=12$, $6+7=13\ldots$ Teraz vidíme, že každé ďalšie číslo za intervalom bude mať rovnakú farbu. To znamená, že by sme nesplnili podmienku, aby boli použité obe farby. Tento prípad nám môže veľmi dobre pomôcť k tomu, aby sme dokázali, že nemôžeme správne vyfarbiť čísla po ľubovoľné n. Stačí nám dokázať, že pre ľubovoľné n vieme vyfarbiť čísla 0 až 6 rovnakou farbou (pretože potom už budú aj všetky ďalšie čísla rovnaké).

Urobíme to nasledovne. Začneme tým, že si zvolíme farbu čísla 0. Napríklad 0 je modrá (budeme označovať M). Pomocou podmienok rovnofarebnosti sa budeme snažiť zafarbovať čísla tak, aby sme dosiahli to, že všetky čísla od 0 do 6 budú musieť byť rovnakej farby. Vieme to spraviť aj takto: $7=0+7$, $11=0+11$, $4=11-7$, $15=4+11$, $8=15-7$, $1=8-7$, $12=1+11$, $5=12-7$, $16=5+11$, $9=16-7$, $2=9-7$, $13=2+11$, $6=13-7$, $17=6+11$, $10=17-7$, $3=10-7$. Podarilo sa nám zafarbiť čísla od 0 do 6 rovnakou farbou. Týmto sme vylúčili možnosť, že podmienky môžu byť splnené pre ľubovoľné n

Našou ďaľšou úlohou je zistiť, pre aké najvyššie n dokážeme splniť podmienky. V predchádzajúcom odstavci sme si všimli, že čísla sa spajajú do reťazcov podľa farby. Aby sme použili na vyfarbovanie aj modrú (M) aj červenú (C), musia existovať minimálne dva reťazce, ktoré sú nezávislé. Nezávislé od seba znamená, že pripočítaním, alebo odpočítaním 7 alebo 11 od hociktorého člena jedného reťazca, nedostaneme žiadneho člena druhého reťazca.

Teraz postupne rozoberieme možnosti pre n:

- $n=6$ Medzi žiadnymi číslami z tejto množiny nie je rozdiel 7. Tým pádom od seba tieto čísla nezávisia a zafarbíme ich ľubovoľne s podmienkou, aby boli použité obe farby.
- $n=7$ Reťazec tvoria čísla 0 a 7 (0-7, takto budeme označovať spojenie čísel do reťazca), ostatné nie sú na sebe závislé. Zafarbovať budeme tak, aby čísla 0 a 7 boli rovnakou farbou a ostatné hocijako tak, aby boli použité aj M aj C.
- $n=8$ Reťazce sú 0-7, 1-8. Zafarbovať ich budeme podľa rovnakých pravidiel.
- $n=9$ Reťazce sú 0-7, 1-8, 2-9.
- $n=10$ Reťazce sú 0-7, 1-8, 2-9, 3-10.
- $n=11$ Reťazce sú 0-7-11-4, 1-8, 2-9, 3-10. Postupne sa nám počet reťazcov a aj počet čísel v nich zväčšuje. Avšak stále máme dosť možností na ofarbovanie.
- $n=12$ Reťazce sú 0-7-11-4, 1-8-12-5, 2-9, 3-10. Jediné nezávislé číslo je 6.
- $n=13$ Reťazce sú 0-7-11-4, 1-8-12-5, 2-9-13-6, 3-10. Všetky čísla sú už od nejakého iného závislé. Teraz už len budeme pridávať čísla, kým nám nebudú závisieť všetky čísla navzájom.
- $n=14$ Reťazce sú 0-7-11-4-3-10-14, 1-8-12-5, 2-9-13-6. Prvá skupina vznikla spojením 0-7-11-4 a 3-10-14, lebo odpočítaním 7 od pribudnutého čísla 14 dostaneme 7, čo je člen prvej skupiny. Stále máme ešte 3 nezávislé reťazce.
- $n=15$ Reťazce sú 0-7-11-4-3-10-14-15-1-8-12-5, 2-9-13-6. Vzťah medzi 15 a 8: $15-7=8$ spojil dve skupiny do jednej. Máme už len dve nezávislé skupiny čísel. Jedna z nich bude M a druhá bude C.
- $n=16$ Číslo 16 spája tieto dve skupiny do jednej: $9+7=16$, $5+11=16$. Vytvoril sa nám rad čísel, ktoré sú na sebe závislé, teda musia byť jednofarebné. Keď $n=16$, podmienky už niesú splnené, lebo všetky čísla sú rovnakej farby.
- Nemôže byť n viac ako 16? Aj takúto možnosť treba vylúčiť. Keďže čísla od 0 do 16 sú rovnakou farbou, tak postupne prirátavaním 7 sa dopracujeme ku všetkým ostatným číslam a teda úloha ani pre vyššie n nemá riešenie.

Odpoveď: Čísla vieme ofarbiť najviac pre $n=15$.

Komentár: Niekoľkí z vás zvládli tento príklad bravúrne. Niektorí však zabudli, že rozdiel 7 a 11 funguje aj smerom dole a vyšlo im, že vieme čísla vyfarbovať do nekonečna. Ďaľšie chyby boli, že ste určili nesprávne maximálne n. Potom sa vyskytli drobnosti, ako zabudnutie na 0, alebo považovanie $n=16$ ako poslednú správnu možnosť a nie ako prvú nesprávnu. Inak vás chcem pochváliť, lebo tento príklad nebol ľahký a napriek tomu ste ho mnohí zvládli:) Ak sa vám aj nepodaril, nevzdávajte sa a riešte tretiu sériu, lebo sústredko sa blíži:)

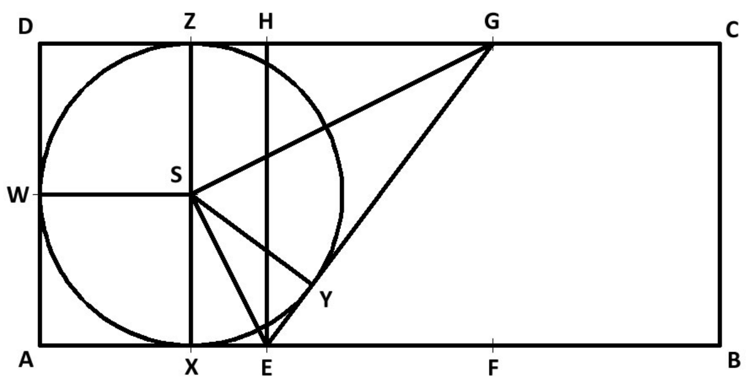
Príklad č. 9 (opravovala Natali):

Zadanie:

Riešenie: Stranu AB rozdelíme na tretiny bodmi E a F, stranu CD bodmi G a H. Teraz musíme spojiť dva z nich tak, aby táto spojnica nebola ani rovnobežná ani kolmá na úsečku BC. Takže môžme spojiť buď E s G, alebo F s H. Nezálaží na tom, ktorú možnosť si vyberieme, keďže sú symetrické. Vyberieme si E s G. Takisto nezáleží na tom, či bude kružnica vpísaná v štvoruholníku $AEGD$ alebo v $EBCG$. Opäť si vyberieme prvú možnosť.

Stred kružnice označíme S a body, v ktorých sa kružnica dotýka úsečiek AE, EG, GD a DA označíme postupne X, Y, Z a W. Môžeme začať. Úsečka XZ tvorí priemer kružnice, takže $|XZ|=2r=8\,m$. $AXZD$ je obdĺžnik, takže aj $|AD|=8\,m$. A aj $|EH|=8\,m$. $AXSW$ a $WSZD$ sú štvorce, takže $|AX|=|ZD|=r=4\,m$. Ďalej ešte vieme, že

$$\frac{|AB|}{3}=|AE|=|GH|=|HD|=x$$



Obrázok 5: obrázok k príkladu 9

Trojuholníky XES a YES sú zhodné podľa vety ssu.

$$|EY| = |EX| = |AE| - |AX| = x - 4$$

Rovnako aj trojuholníky YGS a ZGS sú zhodné, takže

$$|GY| = |GZ| = |GD| - |DZ| = 2x - 4$$

Potom

$$|EG| = |EY| + |YG| = (x - 4) + (2x - 4) = 3x - 8$$

V trojuholníku EGH máme Pytagorovu vetu, z ktorej vieme, že:

$$\begin{aligned} |EH|^2 + |GH|^2 &= |EG|^2 \\ 8^2 + x^2 &= (3x - 8)^2 \\ 64 + x^2 &= 9x^2 - 48x + 64 \\ x^2 &= 9x^2 - 48x \\ 48x &= 8x^2 \\ 6\,m &= x \end{aligned}$$

Vieme,že $|AB| = 3x = 18\,m$ a obsah obdĺžnika $ABCD$ je $18\,m \cdot 8\,m = 144\,m^2$.
Odpoveď: Obsah obdĺžnika je $144\,m^2$.
Komentár: Príklad bol dosť ťažký, ale nie neriešiteľný, veď nebolo treba žiadne vedomosti, ktoré by ste nemali. Preto gratulujem tým zopár z vás, ktorí ste príklad zvládli. A ostatným držím palce do budúcna, hlavne sa netreba zľaknúť ;)

Prémia (opravovali Jankaa, Domča, Ema):

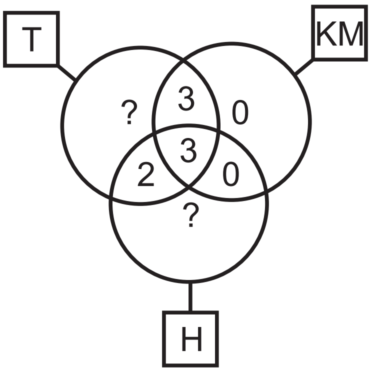
Zadanie:
Doplnené zadanie: Mladí knihovníci, ktorí prejavili potrebné zručnosti, chodia do hlavnej knižnice v Centuriu. Dohliadajú tam na nich skúsení knihovníci a profesori. Zadávajú im rôzne úlohy, na základe ktorých zisťujú ich schpnosti a osobnosť. Počet mladých knihovníkov, ktorí ovládajú históriu a s ňou spojené múdrosti a takisto aj umenie telekinézy je jednociferné prvočíslo. Keď toto číslo zdvojnásobím a pripočítam k nemu 3, dostanem tiež prvočíslo s ciferným súčtom rovným druhej mocnine prvočísla. Len tí, ktorí už zvládli náročné umenie telekinézy sa smú zaujímať o najväčšie tajomstvá Knihy múdrych. No keďže telekinéza dokáže potrápiť, zvládlo ju zatiaľ iba 6 mladých knihovníkov. Všetky tieto zručnosti zvláda súčastne 2-krát menej adeptov. Práve tretina, ktorá ovláda históriu sa venuje aj najväčším tajomstvám. Bohužiaľ počet našich študentov je menší ako sto a ich počet sa rovná rozdielu čísla 25 a počtu mladých knihovníkov, ktorí ovládajú práve dve zručnosti. Koľko zo študentov už má povolenie študovať Knihu múdrych?
Riešenie: Mladí knihovníci sa môžu venovať trom predmetom štúdia: HISTÓRII, TELEKINÉZE a KNIHE MÚDRYCH. Mladý kníhovník sa môže venovať aj viacerým predmetom naraz. Avšak na to, aby sa mohol venovať KM sa musí venovať aj T. Takže bude existovať viacero skupín mladých knihovníkov. Budú takí, ktorí ovládajú všetky tri predmety (označme $H + T + KM$), takí čo ovládajú práve dva predmety ($H + T$, $T + KM$, dvojica H a KM nemôže existovať kvôli podmienke, že na ovládanie KM musí ovládať aj T), a takí, čo ovládajú len jeden predmet (H alebo T, predmet KM nemôže byť samostatne študovaný kvôli tej istej podmienke).

Počet mladých knihovníkov, ktorí ovládajú H a zároveň T je podľa zadania jednociferné prvočíslo. Jednociferné prvočísla poznáme 2, 3, 5 a 7. Keď ich otestujeme podľa podmienok v zadaní, prídeme na to, že im vyhovuje jedine číslo 5.

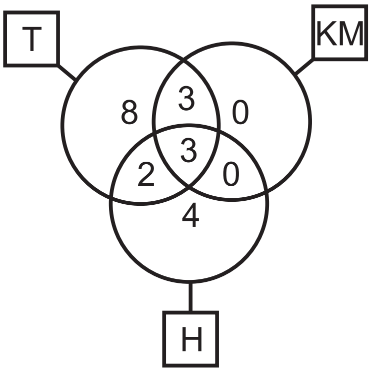
(1.) Z toho vyplýva, že súčet mladých knihovníkov, čo ovládajú $H + T$ alebo $H + T + KM$ je 5.

(2.) Zo zadania tiež vieme, že KM ovláda 6 mladých knihovníkov. Do tejto skupiny sú započítaní knihovníci, čo ovládajú $T + KM$ alebo $H + T + KM$.

(3.) Všetky predmety $H + T + KM$ ovláda polovica tých, čo ovládajú KM, to znamená že traja (polovica zo 6).



Obrázok 6: Množinový diagram



Obrázok 7: Doplnený diagram

Nakreslíme si množinový diagram (Obr. 6). V diagrame si zaznačíme počty mladých knihovníkov do jednotlivých „chlievikov“. Podľa (3.) vieme, že $H + T + KM$ ovládajú 3. Potom podľa (2.) $T + KM$ ovládajú $6 - 3 = 3$ a podľa (1.) $H + T$ ovládajú $5 - 3 = 2$.

Nakoľko už vieme, že počet mladých knihovníkov, ktorí sa venujú práve dvom predmetom ($T + KM$ a $H + T$) je 5, vieme zistiť celkový počet študentov. Počet všetkých študentov je rozdiel čísel 25 a 5. Takže počet všetkých mladých knihovníkov je 20.

Podľa zadania tiež vieme, že tretina mladých knihovníkov študujúcich H študuje zároveň aj KM. $H + KM + T$ študujú traja mladí knihovníci, pričom len H a KM neštuduje nikto, takže H študuje 9 $(3 \cdot 3)$ mladých knihovníkov.

Doplníme si množinový diagram (Obr. 7). Počet mladých knihovníkov, čo študujú len H, bude $9 - (3 + 2) = 4$. Teraz máme vyplnené všetky „chlieviky“ okrem toho, v ktorom sa udáva počet knihovníkov, čo študujú len T. Tých je $20 - (3 + 2 + 3 + 0 + 0 + 4) = 8$.

Povolenie študovať Knihu múdrych majú všetci mladí knihovníci, ktorí sa venujú telekinéze. Z diagramu na obrázku 7, vidíme že tých je 16 $(8 + 3 + 3 + 2)$. (Z toho 6 mladých knihovníkov toto povolenie aj využíva.)

Odpoveď: Povolenie študovať Knihu múdrych má 16 mladých knihovníkov.

Komentár: Veríme, že tento príklad vás riadne zamotal. Aj my sme sa pri jeho riešení zapotili :). Možno preto sme opravovali iba 20 riešení. Tento príklad však vyžadoval len pozorné čítanie. Preto nám je ľúto, že ste nepotrápili viacej svoje hlavičky. Chceli by sme preto pochváliť tých, čo poslali pekné 6 bodové riešenia. Za menšie či väčšie nedostatky sme strhávali 1-4 body. Bohužiaľ bolo dosť aj 0 a 1 bodových riešení, ktoré boli buď celé zle, alebo mali dobre len doplnené zadanie :).