

Zadania 1. kola letnej série 2010/2011

Termín: 28.02.2011

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Príklad č. 6: Skupinka detí si zorganizovala piškvorkový turnaj. Každý hral s každým a celkovo odohrali 136 zápasov. Z toho práve 66 zápasov bolo typu dievča–dievča alebo chlapec–chlapec. Koľko mohlo byť v skupinke chlapcov a koľko dievčat?

Náš najlepší a najkrajší hlavný hrdina sedel nad týmto diabolským problémom už asi hodinu. Veľakrát si povedal, že by to mal vzdať, ale nemohol. Nie preto, že by bol tvrdohlavý, ale preto, že jeho rodičia ho pozorovali a on vedel, že keď to nedá do konca dňa, budú veľmi sklamaní. No celá táto záležitosť ho len viac znervózňovala. Rozhodol sa teda, že sa nenápadne zbaví rodičov.

„Viete, nemusíte tu na mňa čakať, mne to ešte chvíľu potrvá.“

„Ale to nám vôbec nevedí,“ odvetili mu milo, a zároveň zničili jeho nádeje. Vec sa má tak, že jeho rodičia, známi pod menami Palo a Natali boli vedúci Kvadratického ústavu pre prírodné vedy so zameraním na matematiku. Takže bolo zrejmé, že aj ich deti musia byť matematici. Ich prvé dieťa, Dada (milé to dievča), to presne spĺňalo, ako 5-ročná už bola jedným z najlepších matematikov. Povzbudení takýmto vývojom požiadali bociana o dieťa č. 2. Nanešťastie, druhý potomok im až tak šupácky nevyšiel. Prejavoval nadmerný záujem o nemčinu a na matiku bol šmatlák. No rodičia sa stále nevzdali nádeje a každý rok mu dávali nejaký ten príklad, keby sa náhodou konečne prejavil jeho matematický talent. Minulý rok bol príklad až krvavo ťažký.

Príklad č. 2: Na papieri máme napísaný príklad: $6853 - 4172 = 2245$. Zameňte v príklade navzájom cifry dvoch rôznych typov tak, aby rovnica platila (napríklad zámena deviatok za jednotky vyzerá takto: $1291 + 4919 \Rightarrow 9219 + 4191$). Nájdite všetky možnosti.

No mladý výrastok toho začínal mať už plné zuby. Akonáhle jeho rodičia konečne vyšli z dverí, začal obťažovať sestričku:

„Ak mi povieš výsledok, dám ti keks.“

„Nie.“

„Keks a okozub, vieš ten pekný, čo mám schovaný pod posteľou...“

„Hmmm, nie.“

„Dobre, posledná šanca: keks, okozub a moju gitaru.“

Jeho milovaná sestrička vstala, poprechádzala sa po izbe, zvážila túto ponuku a povedala svoj konečný názor: „Ak k tomu pridáš aj fotku Kozzyho brata, tak sa dohodneme.“

„Hmmm, no... Nie, ani náhodou.“

„Ako myslíš,“ odvrkla sestrička a odpochoďovala preč. V tom momente sa náš hrdina rozhodol, že musí odísť. Snáď vo svete nájde viac nepochopených duší.

A tak odišiel zo svojho rodného domu.

Rozhodol sa, že pôjde do najbližšieho mesta. Tak teda išiel. Ako väčšina ľudí, keď niekam ide, tak už niekam dôjde, aj keď to možno nebol prvotný cieľ cesty. Tak aj náš hrdina došiel. Nanešťastie k rieke, našťastie tam bol most, nanešťastie tam sedel stavec.

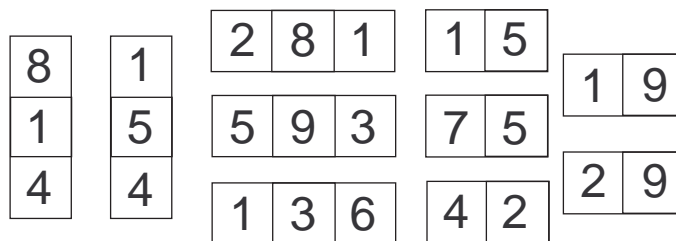
„Čo by si chcel, chlapec?“ spýtal sa ho apaticky stavec.

„Prejsť, stavec,“ odpovedal mu náš hrdina.

„No, ale to musíš vyriešiť tento príklad. A volaj ma Phil, lebo sa naštvem a možno aj nie,“ skúsil sa zamračiť Phil. No keďže náš hrdina o matematike a logickom myslení nevedel nič, tak sa mu to nepodarilo.

„To nevedí, stále môžeš prejsť, keď mi doneseš správny výsledok,“ značne škodoradostne poznamenal Phil.

Príklad č. 5: Zostav obdĺžniky z obrázka číslo 1 do symetrického štvorca veľkosti 5×5 , v ktorom sú vodorovne zoradené tie isté čísla ako zvisle (napríklad tak, ako na obrázku 2). Každý obdĺžnik použi práve raz a žiaden z nich neotáčaj ani nepreklápaj. Koľko ich takých vieš poskladať?



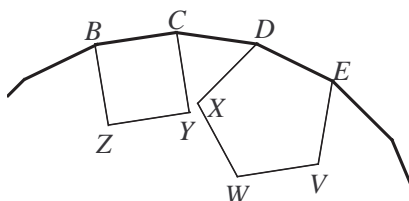
Obrázok 1: Časti symetrického štvorca

Táto správa nášho hrdinu úplne odrovňala. No keďže chcel prejsť, odobral sa na čarovnú lúku, ktorá bola z praktických dôvodov hneď vedľa mosta. Tam sa zvalil do hustej trávy, začal rozmýšľať nad príkladom a dúfať, že možno predsa len zdedil nejaký ten matematický talent po jeho rodičoch. Tráva bola taká hustá a mäkká, že sa mu pomaly začalo mariť, že leží na jemnom koberci utkanom z peria a okolo neho začali poletovať rôzne matematické útvary. Pomaly skĺzol do alfa (a možno aj gama) hladiny spánku.

5	6	3
6	7	1
3	1	5

Obrázok 2: Príklad symetrického štvorca veľkosti 3x3

Príklad č. 7: Na obrázku 3 je znázornená časť pravidelného dvadsaťuholníka $ABCDEFGHI\dots$, štvorec $BCYZ$ a pravidelný päťuholník $DEVWX$. Ukážte, že vrchol X leží na úsečke DY .



Obrázok 3: Časť dvadsaťuholníka

Vtom zrazu počul tenký hlas: „Tak ty si myslíš, že sa máš zle? Veď nevieš nič...“ Nášmu hrdinovi napadlo, že by možno bolo dobré, keby odpovedal. Tak sa posadil a chcel odpovedať tomuto hlasu. Keď sa pozrel pred seba, uvidel dievča s blondávkami vlasmi, modrými očami a inými znakmi typickej krásavice, ktoré sa naňho usmievalo a držalo v ruke mrkvový koláč. Už sa chystal odpovedať, ale prerušil ho ten istý hlas, ktorý nevychádzal z dievčiniých úst: „Koho zaujíma, že ty sa máš zle, po celom svete sa dejú hrozné veci, a...“ Sprška týchto slov bola zastavená vzlykmi, ktoré postupne odzneli. Náš hrdina sa začal obzeráť naokolo, odkiaľ prišiel tento hlas, ale prerušilo ho dievča hlasom takým sladkým, akým je pre správneho rieškaru príchod novej série: „Je na mojom ramene“.

Náš hrdina (budeme ho odteraz volať rieškar), čiže rieškar, sa teda pozrel na jej rameno, kde na svoje prekvapenie uvidel zajaca. „To je môj emo zajačík ViRPo, ja som Mária. Chceš mrkvový koláč?“

„No, teší ma. Ja som rieškar. Koláč si teda dám, ak ti to nevadí.“ Tak si teda rieškar a jeho noví priatelia sadli do trávy a zatiaľ, čo si dávali koláč, rozmýšľali nad Philovým príkladom. Rieškar sa totiž dozvedel, že aj Mária s ViRPom cestujú do mesta. Jeho priatelia nakoniec tento príklad rozlúskli a všetci sa vybrali za Philom. Ten sa na nich najskôr dlho pozeral a snažil sa ich presvedčiť, že to majú zle alebo aspoň donútiť ich, aby sa pod tlakom jeho pohľadu cítili nesvoji, čo sa mu aj podarilo. Nakoniec im oznámil: „No, ale keďže ste traja, tak vám teraz dám ten najťažší príklad, aký existuje.“

Príklad č. 9: Nájdite všetky čísla od 1 do 1 000 000, ktoré sa po preškrtnutí prvej číslice 73-krát zmenšia.

Keď si náš rieškar uvedomil, že toto nevyrieši, pozrel sa na svojich novonájdenných priateľov. Najprv sa pozrel na ViRPa, čo hneď oľutoval. Keď zbadal, že zajačíkovi to nejde, priviedlo ho to do stavu depresie a kvôli depresii mu to nejde, čo ho privádzalo do stavu depresie... Hneď na to sa pozrel na Máriu, ktorá miesila cesto na ďalší koláč a nikoho si nevšímala. „No, myslím si, že je čas použiť špinavú stratégiu,“ pomyslel si rieškar. Rieškar totiž v škole na matematike nepočítal ako ostatné deti. Svoj čas využíval na oveľa tvorivejšie veci.

Príklad č. 3: Pán učiteľ nám zadal takúto úlohu: Nájdí štvorciferné číslo, ktorého prvé dve cifry majú súčet tri, posledné dve cifry súčet 7 a stredné dvojčísle je deliteľné štyrmi. Na druhý deň, keď deti priniesli výsledky, zistili, že žiadna trojica detí nemala rovnaké číslo. Viete zistiť, koľko najviac detí mohlo byť v triede?

Namiesto toho si cvičil švih vareškou. Počkal, kým sa Phil díval niekam inam, vytrhol z Máriinej ruky varešku a ovalil Phila po hlave. Táto špinavá stratégia, ktorú by žiaden matematik a rieškar nemal použiť, zabrala (ale fakt deti, nepoužívajte ju!). Keď si Mária všimla, čo sa stalo s jej vareškou, musel jej rieškar sľúbiť, že v meste jej kúpi novú. Tak sa teda hrdinovia vydali cestou, ktorá viedla smerom k mestu, ktoré sa volalo Západný Logaritmus a bolo hlavným mestom provincie Kvadratická Slast', ktorá bola práve v ozbrojenom bratovražednom konflikte s provinciou Goniometrická Lišta (kde sa dajú kúpiť najlepšie plienky a ponožky v šírom okolí, čo ani náhodou nie je podstatné pre náš príbeh). Tento konflikt vznikol kvôli ministrovi zahraničia z Kvadratickej Slasti, ktorý sa preriekol, že spoločnosť J&T sa až príliš pletie do politiky Goniometrickej Lišty. Odpoveď, v podobe niekoľkých delových gúľ, bola zaslaná do 2 hodín priamo do hlavného mesta.

Príklad č. 8: Marián a Gabika cestovali autom na dovolenku. Aby im cesta ubehla rýchlejšie, vymyslel Marián takúto hru:

- “Jeden z nás povie číslo od 1 do 10,” vysvetľoval hru Gabike.
- “Ten druhý povie následne číslo, ktoré musí byť väčšie aspoň o 1 a najviac o 10. Takto budeme pokračovať až dovtedy, kým niekto nepovie číslo 50. Ten potom vyhráva.”
- “Rozumiem. Poďme hrať,” súhlasila Gabika
- “Fajn, tak začínam,” rozhodol sa Marián.
- “Hej, nie tak rýchlo! Ja začínam, pretože JA chcem vyhrať,” zaprotestoala Gabika. Je naozaj dôležité, aby ten, kto chce vyhrať, začínal? Ak áno, ktorým číslom musí začať?

Toto však naši hrdinovia nevedeli a keby to vedeli, tak by hneď zmenili smer svojej cesty. Žili by šťastne až do smrti a príbeh by sa tu skončil. Našťastie, sa to nestalo. Stalo sa to, že prišli k veľkej mestskej bráne, pred ktorou stál po zuby ozbrojený strážca. Náš rieškar sa nadýchol a podišiel bližšie k strážcovi.

„Dobrý deň, pustíte nás?“

„No, neviem, vyzeráte dosť podozrivo,“ strážca si prezrel Máriu, ktorá sa stále usmievala, „nehovoriac o tom, že môžete byť zvedovia zo susednej provincie.“

Rozrušene ho prerušil ViRPO: „Keď nehovoriac, tak na čo nám to hovoríš? My máme dostatok starostí aj bez teba! A zvedovia pre nejakú provinciu? Ja nemusím byť zved pre niekoho, ja už viem o všetkých špinavostiach, ktoré sa dejú vo svete! Ja to viem VIEM! VIEM !! VIEM !!! VIEM !!!! ...“

„Nevšímajte si ho, máva niekedy cholerické záchvaty,“ milo povedala Mária strážnikovi, ktorý si až teraz všimol emo zajačika ViRPa sediaceho na jej pleci.

„A vôbec, čo chcete v meste?“

„Prišiel som skúmať existenciu a hlavne jej prerušenie,“ zašomral ViRPO, stále trochu urazený na Máriu, ktorá ho prerušila.

„Prišla som si kúpiť varešku,“ povedala Mária a ospravedlňujúco ukázala jej varešku zničenú kvôli Philovej tvrdej hlave.

„A ty?“ spýtavo sa pozrel strážnik na rieškara.

„Ja som študent matematiky. Prišiel som ju študovať ešte viac,“ odpovedal rieškar. Nechcel povedať, že vlastne hľadá zmysel života, lebo sa mu to zdalo trochu trápne.

„Aha, tak študent, čo? No tak s vami urobím dohodu. Ak vypočítate tento príklad, pustím vás.“

Prémia: *«Aká figúrka stojí na šachovnicovom poli E1?»* hľadá nového strážcu kráľovskej pokladne. O tento úrad sa ale smie uchádzať iba ten, kto splní túto úlohu: Uchádzač bude zavedený do zatemnenej miestnosti, v ktorej je na podlahe *«Kolke výročie od svojho podpisania oslavovala v roku 2007 Rímska zmluva?»* mincí, z toho *«Ako sa volá pieseň od kapely Horkýže Slíže na albume Vo štvorici po opici, ktorá má v svojom názve číslo?»* leží hore lícom a zvyšok *«Aké sú prvé tri písmená ruského platidla?»*om. Jeho úlohou je rozdeliť mince na *«Kolko krát obsahuje číslo 2011 v dvojkovej (binárnej) sústave dvojicu jednotiek (oddelenú nulami)?»* (nie nutne rovnako veľké) časti tak, aby počet mincí ležiacich lícom nahor bol v oboch týchto častiach rovnaký. Je povolené ľubovoľné mince otáčať, ale keďže je tma a mince sú staré, nijako sa nedá zistiť, ktoré mince sú ako otočené. Keď teda uchádzač nejakú mincu otáča, netuší, čím bude otočená nahor, vie iba, že ju otočil. Jeden váš známy by sa rád stal strážcom pokladne, ale so skúškou si nevie poradiť. Dokážete mu poradiť postup, pomocou ktorého rozdelí mince na *«Ktoré zo všetkých čísel je najmenšie prvočíslo?»* časti tak, aby počet mincí ležiacich lícom nahor bol v oboch častiach rovnaký? Pre počet mincí ležiacich rubom nahor to už platiť nemusí.

(K riešeniu napíšte aj celé „doplnené“ zadanie.)

„Bože, to je ten najľahší príklad, čo som kedy videl! Vyzeráme snáď, že sme trosky?“

„Počkajte, nechajte to mne,“ povedal rieškar, „myslím že odpoveď je (verte mi, že ak tu vidíte namiesto odpovede bodky, tak máte niečo s očami).“

„To je úžasné, to je tvoj prvý príklad,“ vykrikla Mária, ale hneď, ako zbadala strážnikov vyčítavý pohľad, opravila sa. „Za tento deň. Je to tvoj prvý príklad za tento deň.“

„Tak dobre, ste príliš škaredí na to, aby ste boli zabijaci a príliš hlúpi, aby ste boli zvedovia,“ súhlasil strážca. A s týmito slovami sa im otvorila brána do mesta.

Teraz sa vzdialime od našich hrdinov o 200 metrov hore a 15 minút dozadu. Špičkový tajný agent firmy J&T s krycím menom Miško, s narovnanou kravatou a slnečnými okuliarmi sa práve nachádzal 200 metrov nad nepriateľským mestom. Hliadkoval a zisťoval tajné veci pomocou vzducholode (ďalší špičkový vynález J&T). Ako sa tak pozeral na toto do mriežky postavené mesto, spomenul si na jeden príklad, ktorý sa naučil v akadémii pre supertajných agentov a klaunov...

Príklad č. 1: Ivan mal z papiera so štvorčekovou sieťou vystrihnutý obdĺžnik. Strany obdĺžnika ležali na čiarach siete. Postupne z každej strany svojho obdĺžnika odstrihol pás o šírke jedného štvorčeka siete. Teda najprv odstrihol pásik o šírke jedného štvorčeka siete z jednej strany obdĺžnika. Potom zo zvyšného útvaru, konkrétne z jednej zo strán, z ktorej ešte pásik neodstrihol, odstrihol ďalší pásik. Ďalší pásik odstrihol z jednej zo zvyšných dvoch strán. A nakoniec odstrihol pásik aj z poslednej strany. Z týchto pásikov zložil štvorec obsahujúci 16 štvorčekov (bez ďalšieho strihania a bez prekryvania, či dier). Určite, aké rozmery (v štvorčekoch siete) mal Ivanov pôvodný obdĺžnik.

No rýchlo sa prebral zo svojho sna. Teraz si predsa nemôže dovoliť byť nesústredený, veď slúži vyššiemu účelu. Musel tvrdo pracovať, aby sa dostal tak vysoko v organizácii a minulý týždeň sa konečne mohol stretnúť s najdôležitejšími osobami, v podstate, celého sveta. Áno, minulý týždeň ho pozvali na večierok organizácie, kde prišli aj šéfky spoločnosti J&T JANKA a TINKA, a čo viac, dokonca ho TINKA aj oslovila. V kryptickom jazyku J&T to znelo asi takto:

Príklad č. 4: Veverička si odkladá orechy na zimu. Každý deň je viac nenásytná ako deň predtým, a preto si každý deň odkladá viac a viac. Veverička si pripravila plán zozbierať presne 100 orieškov. Prvý deň nazbierala isté minimálne množstvo. Ďalší deň nazbierala toto isté množstvo a k tomu navyše ešte istý počet (bonusových) orieškov. V tretí deň nazbierala to minimálne množstvo, a k tomu dvakrát viac bonusových, ako predošlý deň. Ďalšie dni sa počty bonusových orieškov naďalej zvyšovali o ich počet v druhom dni. V štvrtý deň teda nazbierala navyše trikrát viac bonusových orieškov, ako v druhý deň. Nakoniec sa jej podarilo nazbierať 100 orieškov za 5 dní. Koľko najviac bonusových orieškov navyše mohla nazbierať v druhý deň, keď každý deň nazbierané minimálne (denné) množstvo prevyšovalo nad bonusovými orieškami (v danom dni) a ak zbierala iba celé oriešky?

To znamená v našom jazyku asi toto:

„JANKA je PÁN, pekná kravata, ale ja mám lepšiu, TINKA je PÁN.“

„JANKA je PÁN, ďakujem ti, ó milostivá pani, TINKA je PÁN.“

„JANKA je PÁN, nie je zač, TINKA je PÁN.“

Vďaka skvelej organizácii J&T, v podstate, ovládla celý kraj smerom od Goniometrickej Lišty k moru a Nezmyselneodruky ostrovom. Jediný kraj, ktorý im zatiaľ vzdoroval, bola Kvadratická Slasť. No nie nadhlo.

Miško sa znova prebral zo svojich spomienok, nahneval sa na seba, ale potom to nechal tak a odpustil si. Teraz sa práve sústredil na východnú bránu, či tam nie je niečo podozrivé. A v tom ju zbadal: to najkrajšie dievča, aké kedy videl (samozrejme okrem TINKY a JANKY). Práve prešla cez východnú bránu spolu s nejakým naozaj podivným chlapcom („Možno môj budúci sok,“ pomyslel si Miško) a držala v ruke niečo ako mrkvový koláč. Mala blond vlasy, modré oči a iné typické znaky krásavice. Nebolo o tom pochýb, bol zamilovaný. No bohužiaľ Miško nedostal žiadny špeciálny tréning. Jediný, kto sa v takýchto veciach vyznal, bola tajná agentka Halucinka, ktorá bola majsterka umenia „dohadzovania“. Takže urobil to, čo si bol istý, že nikomu neublíži a nikto sa kvôli tomu nebude cítiť trápne. Uniesol ju.